**ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

**5.1. Основные понятия**

Потребность в оптимизации управления производством повлекла за собой развитие специальных математических методов решения экстремальных задач, т. е. задач, связанных с определением таких значений параметров производственного процесса, которые обращают заданную функцию цели в максимум или минимум. Эти методы входят в большой раздел прикладной математики, получивший название ***математического******программирования****:* линейного, нелинейного (выпуклого), динамического и др. Наиболее распространенным и разработанным является линейное программирование.

***Линейное программирование*** – это раздел прикладной математики, основной задачей которого является определение экстремума линейной функции конечного числа неотрицательных аргументов, связанных между собой системой линейных ограничений. Линейным программированием определяют (минимум или максимум) функции вида

 (5.1)

если аргументы этой функции связаны системой линейных ограничений:



Эту систему можно коротко записать так:

 (*i*=1, 2, ..., m). (5.2)

Величины *cj*, *aij,* и *bi* заданы. Число неизвестных *xj* равно *n*, а число линейных ограничений – *m*, причем *n*>*m*. Кроме того, полагают, что *xj* ≥0, так как отрицательные значения этих величин в практических задачах не имеют смысла. Таким образом, необходимо решить систему линейных неравенств (4.2) и из всех возможных решений выбрать такое, при котором функция (5.1) принимает минимальное (максимальное) значение. Если, например, величины *cj* выражают расходы, то необходимо найти такое решение системы, которое обеспечивало бы минимальное из всех возможных значений функции *С.* Если же величины *cj* выражают доходы, то решение системы должно обеспечивать максимум функции *С*.

Подобная формулировка общей задачи линейного программирования находит практическое применение при определении рационального использования имеющихся ресурсов сырья на предприятии, эффективного использования рабочих, мощностей оборудования, наивыгоднейшего состава кормов для скота, планирования производства и т. д.

Классическим примером общей задачи линейного программирования является задача оптимального использования ресурсов. Она сводится к следующему. Предприятие имеет *m* видов ресурсов (сырье, оборудование, рабочая сила и т.п.) в количестве соответственно *b*1, *b*2, ..., *b*i, *b*m. На предприятии возможен выпуск продукции *n* типов. Единица продукции каждого типа обеспечивает предприятию доход соответственно *с*1, *с*2, ..., *с*j, *c*n. Известна затрата каждого вида ресурсов на производство единицы продукции каждого типа *aij*. Требуется определить такие размеры выпуска продукции каждого типа *xj*, которое обеспечат предприятию максимальный доход.

В данном случае целевую функцию (5.1), выражающую общий доход от всей выработанной продукции, необходимо привести к максимуму. Каждое ограничение-неравенство (5.2) обозначает, что общие затраты какого-либо ресурса на производство всех типов продукции не должны превышать имеющегося наличия этого ресурса.

Для решения подобных задач разработаны методы, позволяющие из огромного множества возможных вариантов, не рассматривая всех, выбрать оптимальный (наивыгоднейший) в том или ином смысле. Одним из наиболее эффективных является так называемый ***симплекс-метод***, основы которого разработаны американским математиком Данцингом в 1947 году. Сущность метода заключается в последовательном улучшении плана (решения задачи) до тех пор, пока он не будет оптимальным. Название метода не вытекает из его содержания, а объясняется случайными обстоятельствами. Этот метод иногда называют универсальным, поскольку он пригоден для решения всех задач линейного программирования.

**5.2 Симплекс-метод решения общей задачи**

Рассмотрим решение общей задачи линейного программирования универсальным симплекс-методом на следующем примере. На станции необходимо выгрузить 80 вагонов однородного груза. Выгрузка эта может производиться на трех грузовых фронтах, каждый из которых вмещает определенное количество вагонов (табл. 13). Подача, расстановка, сборка и уборка вагонов производятся одним локомотивом, продолжительность работы которого 23 часа в сутки. Затраты локомотиво-часов маневровой работы, отнесенные на один вагон, различны для каждого грузового фронта. За выгрузку вагонов станция взимает с клиентов определенную плату, но вследствие различной технической оснащенности грузовых фронтов доход от выгрузки одного вагона неодинаков. Необходимо распределить вагоны по грузовым фронтам таким образом, чтобы обеспечить за сутки максимальную выгрузку и получение станцией максимального дохода.

Таблица 13

Характеристика грузовых фронтов

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Грузовой  фронт | Вместимость,  ваг. | Затрата локомотиво-часов на один вагон | Доход,  руб/ваг. |
| 1 | 35 | 0,2 | 3 |
| 2 | 40 | 0,4 | 5 |
| 3 | 25 | 0,3 | 4 |

На первый взгляд кажется целесообразным обеспечить полную загрузку фронта 2, так как выгрузка вагонов на этом фронте обеспечивает получение станцией максимального дохода. Однако вследствие ограниченности ресурсов локомотиво-часов маневровой работы станция не успеет выгрузить остальные вагоны. Возникает вопрос, нельзя ли перераспределить выгрузку вагонов по фронтам таким образом, чтобы увеличить количество выгружаемых вагонов и при этом не снизить, а по возможности увеличить получаемый станцией доход. При этом необходима гарантия, что избранный вариант действительно является оптимальным. Ответ на это дает строгое математическое решение.

Сформулируем математически данную задачу. Обозначим число вагонов, предназначенных для выгрузки на грузовом фронте 1 – *х*1, на грузовом фронте 2 – *х*2, на грузовом фронте 3 – *х*3. Тогда целевую функцию, выражающую общий доход станции от выгрузки вагонов, можно записать в виде следующего выражения

С=3*х*1+5*х*2+4*х*3.

Составим ограничения, которые накладываются на аргументы этой функции. Прежде всего необходимо учесть ограничение по наличию вагонов: сумма всех поданных вагонов не должна превышать их наличия, или

*х*1+*х*2+*х*380.

Далее необходимо учесть ограничение по ресурсам локомотиво-часов – общее время на обработку всех грузовых фронтов не должно превышать имеющихся ресурсов:

0,2*х*1+0,4*х*2+0,3*х*323.

Наконец, необходимо учесть ограничения по вместимости грузовых фронтов:

*х*1 ≤ 35; *х*2 ≤ 40; *х*3 ≤ 25.

Таким образом, нами поставлена следующая задача. Необходимо определить неотрицательные значения аргументов, обращающих в максимум линейную функцию

С=3*х*1+5*х*2+4*х*3 → max (5.3)

и связанных системой линейных ограничений

*х*1+*х*2+*х*380;

0,2*х*1+0,4*х*2+0,3*х*323

*х*1 ≤ 35; (5.4)

*х*2 ≤ 40;

*х*3 ≤ 25.

Другими словами, необходимо из всех возможных решений системы неравенств (5.4) выбрать такое, которое соответствует максимальному значению целевой функции (5.3).

Неравенства можно привести к уравнениям путем введения дополнительных неизвестных. Так, если обозначить число не поданных под выгрузку вагонов *y*1, количество неиспользованных локомотиво-часов *y*2, недоиспользованную вместимость грузовых фронтов *y*3, *y*4 и *y*5, то систему линейных неравенств (5.4) можно записать в виде системы линейных уравнений

*х*1+*х*2+*х*3+*y*180;

0,2*х*1+0,4*х*2+0,3*х*3+*y*223

*х*1+*y*3≤35; (5.5)

*х*2+*y*4≤ 40;

*х*3+ *y*5≤ 25.

Рассмотрим полученную систему. Так как число неизвестных (восемь) больше числа уравнений (пять), то она является неопределенной и имеет бесчисленное множество решений. Неопределенные системы решаются так. Все неизвестные произвольно подразделяются на базисные и свободные. Число базисных определяется числом независимых уравнений системы. Остальные неизвестные – свободные. Свободным неизвестным придают произвольные значения и подставляют в систему, которая при этом из неопределенной превращаются в определенную с единственным решением. Любому набору свободных неизвестных можно придать бесчисленное множество произвольных значений, которые дадут бесчисленное множество решений системы (5.5). Если все свободные неизвестные приравнять к нулю, то решение будет состоять только из значений базисных неизвестных. Такое решение называется базисным. Рассматривая в качестве свободных те или иные неизвестные, можно получить различные базисные решения, число которых определится числом сочетаний из *n* по *m* элементов , где *n* – общее число неизвестных; *m* – число базисных неизвестных.

В теории линейного программирования существует теорема, которая доказывает, что среди базисных решений системы всегда можно найти оптимальное. В некоторых случаях может быть получено несколько оптимальных решений, но все они обеспечат экстремум целевой функции. Таким образом, если мы найдем какой-либо базисный план, а затем будем его улучшать, то в конце концов придем к оптимальному решению. На этом принципе и построен симплекс-метод.

В нашем случае удобнее всего найти базисный план, приняв в качестве базисных пять неизвестных (по числу уравнений): *y*1, *y*2, *y*3, *y*4 и *y*5. Тогда свободными неизвестными будут , , . Используя систему (5.5), выразим все базисные неизвестные через свободные:

*y*1=80-(*х*1+*х*2+*х*3);

*y*2=23-(0,2*х*1+0,4*х*2+0,3*х*3);

*y*3=35-*х*1; (5.6)

*y*4=40-*х*2;

*y*5=25-*х*3.

Выражение целевой функции перепишем в аналогичной форме

С=0-(-3*х*1-5*х*2-4*х*3) (5.7)

Приравняв свободные неизвестные к нулю, получим следующий базисный план:

*y*1=80 (количество неподанных вагонов);

*y*2=23 (неиспользованные ресурсы локомотиво-часов);

*y*3=35 (неиспользованная вместимость грузового фронта 1);

*y*4=40 (неиспользованная вместимость грузового фронта 2);

*y*5=25 (неиспользованная вместимость грузового фронта 3).

Данный план (назовем его начальным планом) соответствует ситуации, когда вагоны вообще не подаются под выгрузку, а общий доход станции (значение целевой функции *С*) равен нулю. Поэтому план необходимо улучшить, т. е. необходимо перейти к другому базисному плану. Базисные планы отличаются друг от друга набором свободных и базисных неизвестных. Значит, если мы исключим какую-либо неизвестную из числа базисных и введем ее в число свободных, а из числа свободных одну неизвестную введем в число базисных, мы получим новый базисный план. Надо лишь найти для этого такие неизвестные, чтобы следующий базисный план оказался лучшим по сравнению с предыдущим, т. е. увеличить значение целевой функции *С*. Эти действия и производятся с помощью симплекс-метода.

Все вычисления производятся в специальных симплекс-таблицах. В первую таблицу (табл. 14) вносятся данные начального плана, т. е. записываются все коэффициенты при свободных неизвестных (с их знаками в круглых скобках) и свободные члены системы (5.6). Каждый коэффициент записывается в столбце, соответствующем данной свободной неизвестной. Свободные члены проставляются в последний столбец, который обозначен единицей. Первая строка соответствует выражению *y*1, вторая – *y*2 и т. д. В последней *С*-строке записываются коэффициенты при неизвестных целевой функции. Последний элемент этой строки предназначается для записи значения целевой функции (ее свободного члена), которое в данном случае (при *х*1=*х*2=*х*3=0) равно нулю. Таким образом, каждая строка таблицы (такие таблицы носят название матриц) обозначается соответствующей базисной неизвестной и знаком целевой функции *С*, каждый столбец – свободной неизвестной со знаком минус и единицей (для свободных членов). Знак минус перед свободной неизвестной соответствует знаку минус, стоящему перед круглыми скобками в выражениях (5.6) и (5.7).

Поскольку в базисном плане значения свободных неизвестных равны нулю, то все значения базисных неизвестных равны соответствующим свободным членам. Так, в рассматриваемом базисном плане (табл. 14) *y*1=80, *y*2=23, *y*3=35; *y*4=40; *y*5=25.

Для того чтобы произвести указанную замену переменных, надо сначала их выбрать, а затем поменять местами. В результате будет получена матрица с новым планом. В соответствии с этим алгоритм расчета содержит два этапа.

1. Выбор разрешающего элемента:

а) столбец, содержащий наибольший по абсолютной величине отрицательный элемент *С*-строки, принимается в качестве разрешающего столбца;

б) рассматриваются все положительные элементы разрешающего столбца (кроме элемента *С*-строки) и на них делятся соответствующие свободные члены. Минимальное из полученных отношений определяет разрешающую строку. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится разрешающий элемент. Если окажется два или более одинаковых наибольших по абсолютной величине отрицательных элемента *С*-строки, то в качестве разрешающего столбца выбирается тот, которому соответствует максимальное из двух полученных минимальных отношений. На пересечении этой строки и столбца находится разрешающий элемент.

2. Модифицированное жорданово исключение:

а) в новой матрице элемент, стоящий на месте разрешающего элемента предыдущей матрицы, определяется путем деления единицы на разрешающий элемент



где *ars* – разрешающий элемент предыдущей матрицы, расположенный на пересечении;

*r*-ой (разрешающей) строки и *s*-го (разрешающего) столбца;

б) остальные элементы, стоящие на месте разрешающей строки, определяются путем деления соответствующих элементов предыдущей матрицы на разрешающий элемент



где *arj* – элемент разрешающей строки предыдущей матрицы;

в) остальные элементы, стоящие на месте разрешающего столбца, определяются аналогично, но меняют знак на противоположный

,

где *ais* – элемент разрешающего столбца предыдущей матрицы;

г) все другие элементы новой матрицы определяются по формуле

,

где *aij* – соответствующий элемент предыдущей матрицы;

*ais* – элемент предыдущей матрицы, стоящий на пересечении строки рассматриваемого элемента *i* и разрешающего столбца;

*arj* – элемент предыдущей матрицы, стоящий на пересечении разрешающей строки и столбца рассматриваемого элемента *j*.

Все перечисленные действия составляют одну итерацию (улучшение), в результате которой совершается переход от одного базисного плана к другому, улучшенному. Итерации повторяются до тех пор, пока не будет получен план, который уже нельзя улучшить. Этот план и будет оптимальным. Признаком оптимальности плана (невозможности его улучшения) будет отсутствие в *С*-строке отрицательных элементов.

В построенной нами первой симплекс-таблице наибольший по абсолютной величине отрицательный элемент *С*-строки расположен в столбце (-*х*2) и равен (). Выбираем этот столбец в качестве разрешающего (в таблице указан стрелкой). Это означает, что неизвестную *х*2 надо исключить из числа свободных и включить в число базисных неизвестных. В свою очередь, из числа базисных надо перевести одну неизвестную в число свободных. Для ее определения надо выбрать разрешающую строку.

Таблица 14

Начальный план

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -*х*1 | -*х*2 | -*х*3 | 1 |
| *y*1 | 1 | 1 | 1 | 80 |
| *y*2 | 0,2 | 0,4 | 0,3 | 23 |
| *y*3 | 1 | 0 | 0 | 35 |
| *y*4 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| *y*5 | 0 | 0 | 1 | 25 |
| *C* | -3 | -5 | -4 | 0 |



Делим свободные члены строк базисных неизвестных на соответствующие положительные элементы разрешающего столбца (-*х*2). Получаем отношения:

80:1 = 80; 23:0,4 =57,5; 40:1 = 40.

Минимальное отношение (40) показывает, что соответствующую ему строку (*y*4) надо принять в качестве разрешающей (отмечена стрелкой). Базисная неизвестная *y*4 подлежит переносу в число свободных. На пересечении разрешающего столбца (-*х*2) и разрешающей строки (*y*4) находится разрешающий элемент, который в данном случае равен единице (взят в рамку).

Теперь приступим к формированию новой матрицы (табл. 15). Рассмотрим этот процесс по пунктам.

1. Элемент, стоящий на месте разрешающего (*r*=4, *s*=2):

,

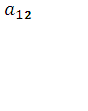
т. е. в данном случае разрешающий элемент переносится в новую матрицу без изменения, поскольку он равен единице.

2. Остальные элементы разрешающей строки также сохраняют свои значения (деление на единицу).

3. Остальные элементы разрешающего столбца (кроме разрешающего элемента) сохраняют свои значения (деление на единицу), но меняют знак на противоположный. При этом отрицательный элемент *С*-строки превращается в положительный.

4. Определяем все другие элементы новой матрицы. Так, элемент, стоящий на пересечении первой строки (*i*=1) и первого столбца (*j*=1),

.

Для облегчения вычислений используют следующее правило. Чтобы определить какой-либо элемент новой матрицы (не принадлежащий разрешающей строке и разрешающему столбцу), необходимо соответствующий ему элемент старой матрицы и ее разрешающий элемент объединить прямоугольным контуром (показан штриховой линией). Разность произведений противоположных вершин контура и есть числитель формулы для определения *b*11. Чтобы определить, например, последний элемент первой строки *b*14 (свободный член выражения *y*1), строим прямоугольный контур на матрице (табл. 14), одной из вершин которого будет элемент *a*14=80, другой – разрешающий элемент *a*42=1 (показан штриховой линией). Две другие вершины этого контура будут *a*12=1 и *a*44=40. Тогда значение рассматриваемого элемента определится путем деления разности произведений противоположных вершин контура на разрешающий элемент

.

Аналогично подсчитываются и все остальные элементы матрицы, включая и элементы *С*-строки. В результате нами получен новый базисный план (табл. 15) с возросшим значением целевой функции *C*=200 и новыми значениями базисных неизвестных: *y*1=40, *y*2=7, *y*3=35; *y*4=40; *y*5=25.

Сущность данной итерации можно пояснить следующим образом. Рассматривая выражение целевой функции (5.3), видим, что наибольший доход дает переменная *х*2. Поэтому ее прежде всего необходимо включить в число базисных неизвестных, т. е. придать ей максимально возможное положительное значение. Анализируя систему (5.6), устанавливаем, что максимальное значение *х*2 можно найти из четвертого уравнения системы, приняв *y*4=0. Тогда *х*2=40. Переменная *х*2 входит также в первое и второе уравнения системы, но из них определить ее таким образом нельзя, так как при этом не будет выполнено условие неотрицательности решения. Так, из первого уравнения, приняв *y*1=0 и учитывая, что *х*1=*х*3=0, можно определить *х*2=80. Но это решение неприемлемо, так как, будучи подставленным в четвертое уравнение, оно превращает *y*4 в отрицательное число, что невозможно по условиям задачи. Таким образом, значение *х*2 определится из четвертого уравнения.

Подставим полученное выражение в систему (5.6):

*y*1=80-(*х*1+(40-*y*4)+*х*3)=40-(*х*1-*y*4+*х*3);

*y*2=23-(0,2*х*1+0,4(40-*y*4)+0,3*х*3)=

=7-(0,2 *х*1-0,4*y*4+0,3*х*3); (5.8)

*y*3=35-*х*1

*y*4=40-*х*2;

*y*5=25-*х*3.

В системе (5.8) все базисные неизвестные выражены через свободные. Теперь свободными неизвестными являются *х*1, *y*4 и *х*3. Приравняв их к нулю, получим уже найденное решение.

Подставим *х*2=40-*y*4 в выражение целевой функции (5.7), получим:

С=0-(-3*х*1-5(40-*y*4)-4*х*3)=200-(-3*х*1+5*y*4-4*х*3) (5.9)

При равенстве свободных неизвестных нулю *С*=200. Рассматривая табл. 15, видим, что в ней записаны все коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы (5.8) целевой функции (5.9). Таким образом, алгоритм симплекс-метода дает возможность, переходя от одной симплекс-таблицы к другой, улучшать базисные планы, не производя никаких действий с системами линейных уравнений.

Таблица 15

Результат первой итерации

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -*х*1 | *-y*4 | -*х*3 | 1 |
| *y*1 | 1 | -1 | 1 | 40 |
| *y*2 | 0,2 | -0,4 | 0,3 | 7 |
| *y*3 | 1 | 0 | 0 | 35 |
| *х*2 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| *y*5 | 0 | 0 | 1 | 25 |
| *C* | -3 | 5 | -4 | 200 |

Продолжим решение задачи. Теперь в матрице (табл. 15) наибольшим по абсолютной величине отрицательным элементом *С*-строки будет элемент третьего столбца (-*х*3), равный (–4). Принимаем данный столбец в качестве разрешающего. Разрешающей строкой будет вторая (*y*2), так как 7: 3<(40:1, 25:1). Разрешающий элемент *a*23=0,3. Формируем новую матрицу (табл. 16) по описанным выше правилам.

1. Элемент, стоящий на месте разрешающего:

.

2. Остальные элементы разрешающей строки определяются делением соответствующих элементов старой матрицы (табл. 15) на разрешающий элемент:

; ; .

3. Остальные элементы разрешающего столбца определяются аналогично, но меняют свой знак на противоположный

 и т.д.

1. Определяем установленным порядком элементы матрицы, не принадлежащие разрешающим строке и столбцу:

;

;

 и т.д.

В полученной матрице (табл. 16) имеем следующий базисный план:

; ; ; ; ; .

Производим следующую итерацию. Поскольку в матрице (табл. 16) имеются два одинаковых, наибольших по абсолютной величине отрицательных элемента *С*-строки (в первом и втором столбцах), выбор разрешающего элемента производим по сопоставлению минимальных отношений для первого и второго столбцов. Для первого столбца разрешающей должна быть вторая или третья строка: .

Для второго столбца разрешающей должна быть пятая строка:  40:1).

По максимальному из полученных минимальных отношений выбираем в качестве разрешающего первый столбец:  35 : 1; .

При этом разрешающей строкой может быть как вторая, так и третья: .

Выбираем в качестве разрешающей третью строку, так как в этом случае разрешающий элемент *а*13 будет равен единице, что упрощает последующие вычисления.

Таблица 16

Результат второй итерации

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -*х*1 | *-y*4 | *-y*2 | 1 |
| *y*1 |  |  |  |  |
| *y*2 |  |  |  |  |
| *y*3 | 1 | 0 | 0 | 35 |
| *х*2 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| *y*5 | 0 | 0 | 1 |  |
| *C* |  |  |  |  |

Формируем новую матрицу (табл. 17), по которой определим новое решение:

; ; ; ; ; .

Поскольку среди элементов *С*-строки имеется отрицательный ( во втором столбце), производим новую итерацию и получаем новое решение (табл. 18):

; ; ; ; ; .

Все элементы *С*-строки данной матрицы положительны, поэтому план является оптимальным. Согласно этому плану мы должны загрузить первый грузовой фронт полностью по его вместимости . На второй фронт подать лишь 25 вагонов  с недоиспользованием его вместимости на 15 вагонов . На третий фронт подать 20 вагонов , недогрузив его на 5 вагонов .

Таблица 17

Результат третьей итерации

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -*y*3 | *-y*4 | *-y*2 | 1 |
| *y*1 |  |  |  | 5 |
| *х*3 |  |  |  | 0 |
| *х*1 | 1 | 0 | 0 | 35 |
| *х*2 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| *y*5 |  | 0 |  | 25 |
| *C* |  |  |  | 305 |

Таблица 18

Оптимальный план

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *-y*3 | *-y*1 | *-y*2 | 1 |
| *y*4 | -1 | 3 | -10 | 15 |
| *х*3 | -2 | 4 | -10 | 20 |
| *х*1 | 1 | 0 | 0 | 35 |
| *х*2 | 1 | -3 | 10 | 25 |
| *y*5 | 2 | -4 | 10 | 5 |
| *C* | 0 | 1 | 10 | 310 |

Свободными неизвестными являются в данном плане являются ,  и . Это означает, что недоиспользования вместимости первого грузового фронта не имеется (=0), неподанных вагонов нет (= 0) и все ресурсы локомотиво-часов использованы полностью (=0). При таком распределении вагонов обеспечивается максимальный доход в размере 310 рублей.