**ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**

**4.1. Общие понятия**

Под системой массового обслуживания обычно понимают совокупность взаимодействующих между собой в процессе обслуживания потока требований и обслуживающих устройств. Под термином «требование» понимается запрос на удовлетворение какой-либо потребности или выполнение определенной технологической операции. Последовательность требований, поступающих на обслуживание в какие-то моменты времени, составляет поток требований. Сущность обслуживания заключается в удовлетворении потребности и зависит от назначения и типа системы.

Примеры характерных для транспорта потоков требований, сущности обслуживания и обслуживающих устройств приведены в табл. 11.

Таблица 11

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Поток требований | Сущность обслуживания | Обслуживающих устройств |
| Поезда | Прием на станцию  Отправление | Приемоотправочные пути.  Перегон (блок-участок) |
| Составы | Технический осмотр  Коммерческий осмотр  Расформирование и формирование | Бригада осмотрщиков  Приемщики поездов  Сортировочные устройства и маневровые локомотивы |
| Группы вагонов | Подача (уборка) на грузовые фронты  Выполнение грузовых операций  Ремонт | Маневровый локомотив  Погрузочно-разгрузочные устройства  Ремонтные бригады |
| Локомотивы | Технический осмотр  Экипировка  Ремонт | Локомотивные или  специальные бригады  Экипировочные устройства  Ремонтные стойла и бригады |
| Пассажиры | Продажа билетов | Билетные кассы и автоматы |

Установлением зависимостей между потоком требований, обслуживанием и обслуживающими устройствами занимается теория массового обслуживания, целью которой является разработка математических методов для отыскания основных характеристик процессов массового обслуживания и оценки качества функционирования обслуживающих систем. Наиболее распространенная практическая задача теории массового обслуживания – выбор оптимального количества обслуживающих устройств.

**4.2. Элементы систем массового обслуживания и их основные характеристики**

Основными элементами системы массового обслуживания (рис. 4.1) являются входящий поток требований, обслуживающие устройства и выходящий поток.

*Входящий поток* в общем случае представляет собой поток случайных событий и характеризуется интенсивностью  и законом распределения. Под интенсивностью (плотностью) потока  понимают среднее число требований, поступающих в систему в единицу времени.

*Выходящий*

*поток*

*Входящий*

*поток*

*Обслуживающие*

*устройства*

Рисунок 4.1 Графическое представление элементов системы массового обслуживания

Закон распределения входящего потока может характеризовать распределение числа требований, поступающих за определенные периоды времени, или распределение интервалов между последовательными поступлениями требований. Основные виды потоков событий: простейший (пуассоновский), Эрланга, биноминальный, регулярный.

При помощи *обслуживающих устройств* производится обслуживание требований входящего потока, которое характеризуется интенсивностью обслуживания  и средним значением времени обслуживания

,

а также законом распределения этого времени.

Интенсивность обслуживания  представляет собой среднее число требований, которые могут быть обслужены в единицу времени. Она является величиной, обратной среднему времени обслуживания.

Для транспортных систем наиболее характерно время обслуживания, распределенное по показательному или Эрланговскому закону и постоянное.

*Выходящий поток* требований характеризуется такими же параметрами, что и входящий. Отношение интенсивности входящего потока  к интенсивности обслуживания  называется коэффициентом использования, или загрузкой системы и в значительной степени определяет эффективность функционирования.

.

**4.3. Классификация систем массового обслуживания**

Системы массового обслуживания классифицируются по ряду признаков. В зависимости от поведения требования, поступившего в систему в момент занятости всех обслуживающих устройств, различают системы с ожиданием, с потерями и смешанные. В системах с ожиданием требования при занятости всех каналов становятся в очередь и ждут обслуживания. В системах с потерями при получении отказа требования покидают систему, не ожидая обслуживания. В смешанных системах требования при соблюдении определенных условий (ограничений) ожидают обслуживания, в противном случае – покидают систему. На железнодорожном транспорте чаще всего встречаются системы массового обслуживания с ожиданием и смешанные.

По числу обслуживающих устройств системы делятся на одноканальные и многоканальные, а по числу фаз обслуживания – на однофазные и многофазные. Примером многофазной системы массового обслуживания может служить сортировочная станция, где входящий поток, обслуженный в одном парке, направляется в другой.

По дисциплине обслуживания различают системы с приоритетами и системы с обслуживанием в порядке поступления требований.

Приоритеты, т. е. преимущества в обслуживании одной категории требований перед другими, могут быть абсолютными или относительными. При поступлении требования с абсолютным приоритетом и занятости всех обслуживающих устройств прекращается обслуживание одного из «рядовых» требований и немедленно начинается обслуживание приоритетного требования. При поступлении требования с относительным приоритетом обслуживание других требований не прекращается, но они становятся на первое место в очереди.

Чаще всего обслуживание в транспортных системах ведется в порядке поступления требований, а приоритеты применяются как мера улучшения определенных показателей. Например, для ускорения накопления составов на горках нередко дается относительный приоритет в обслуживании составов с замыкающими группами вагонов. Кроме того, различают замкнутые и разомкнутые (открытые) системы, а также полнодоступные и неполнодоступные системы.

В замкнутых системах обращаются некоторое постоянное число требований, а в разомкнутых число требований, которые могут поступать в данную систему, практически не ограниченно. Замкнутой можно считать систему обслуживания (например, ремонта) локомотивов, приписанных к депо и обращающихся на данном участке, а разомкнутой – систему расформирования вагонов на горке.

Полнодоступными считаются системы, в которых все обслуживающие устройства всегда готовы к обслуживанию поступающих требований, а неполнодоступными – системы, в которых часть обслуживающих устройств в определенные периоды выключаются из процесса обслуживания. Полнодоступной является, например, система продажи билетов в нескольких кассах (автоматах), поскольку пассажир может занимать очередь в любую из касс. Примером неполнодоступной системы является система формирования поездов в хвостовой горловине сортировочного парка, где взаимопомощь маневровых локомотивов ограничивается конструкцией горловины (враждебностью маршрутов).

**4.4. Простейший поток требований**

Аналитические методы теории массового обслуживания наиболее разработаны для так называемых простейших потоков.

Изобразим на числовой оси поток однородных событий (требований), различающихся моментами появления. Имеем последовательность точек , ,  , ,  , соответствующих моментам появления событий (рис. 4.2).









0

*t*

Рисунок 4.2 Поток однородных требований

Поток событий называется *стационарным***,** если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени длиной  зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси расположен этот участок. Стационарность потока выражает собой неизменность его вероятностного режима во времени.

Поток событий называется потоком *без последействия*, если для любых непересекающихся промежутков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие. Условие отсутствия последействия означает, что заявки поступают в систему независимо друг от друга.

Поток событий называется ординарным, если вероятность попадания на элементарный участок  двух или более событий пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью попадания одного события. Иными словами, ординарность потока выражает собой практическую невозможность совмещения двух или более событий в один и тот же момент времени.

Если поток событий обладает всеми тремя свойствами, т. е. стационарен, не имеет последействия и ординарен, то он является простейшим или стационарным пуассоновским потоком.

Его особенности заключаются в том, что число требований *k*, поступающих за период времени *t*, имеет пуассоновское распределение

 ,

в интервал времени *t* между последовательно поступающими требованиями – показательное распределение

.

Известно, что для закона Пуассона математическое ожидание случайной величины равно его параметру, т. е. в данном случае



а для  . Значит, параметр  представляет собой математическое ожидание числа требований, поступающих в единицу времени, или интенсивность потока. Таким образом, для описания простейшего потока необходимо знать только одну величину – интенсивность потока требований.

Важное значение простейшего потока обусловлено следующим известным фактом (своего рода налогом центральной предельной теоремы теории вероятностей): сумму достаточно большого числа (на практике от 5-6) потоков с примерно одинаковыми интенсивностями можно считать простейшим потоком.

**4.5. Другие примеры потоков**

Во многих практических задачах встречаются потоки стационарные, ординарные, но с последействием. Если при этом интервалы между поступлениями требований составляют последовательность независимых случайных величин, то его называют *рекуррентным потоком*, или потоком Пальма. Выделим следующие из рекуррентных потоков:

1. *регулярный поток* (с фиксированными интервалами между моментами поступления требований). Он имеет так называемое жесткое последействие;
2. *нормальный поток* **–** его интервалы распределены по усеченному нормальному закону. Он определен только на положительной полуоси и имеет смысл, когда  (– математическое ожидание,  – среднеквадратическое отклонение длины интервала). Если →0, то нормальный поток вырождается в регулярный;
3. семейство*потоков Эрланга***.** Интервалы между моментами появления требований в потоке Эрланга -го порядка  распределены как суммы  подинтервалов по показательному закону. Это значит, что если мы в простейшем потоке оставим каждое -е требование, а остальные выбросим, то получим поток Эрланга -го порядка. Плотность распределения интервалов между требованиями в потоке Эрланга -го порядка имеет вид

  

где  – интенсивность простейшего потока.

Распределение Эрланга первого порядка – это показательное распределение, а поток Эрланга первого порядка – это простейший поток.

Для закона Эрланга -го порядка , .

При увеличении  ( не меняется) распределение интервалов все больше приближается к усеченному нормальному. При →∞ поток становится регулярным.

Важным параметром потока является *коэффициент вариации интервалов* между моментами поступления требований , характеризующий степень неравномерности поступления требований. Для простейшего потока , для потока Эрланга -го порядка , для регулярного потока . На практике мы почти всегда имеем дело с потоками, для которых .

**4.6. Показатели качества функционирования систем массового обслуживания**

Качество функционирования систем массового обслуживания может быть оценено целым рядом показателей, выбор которых зависит от характера решаемой задачи и типа системы.

Основными показателями являются:

- загрузка системы ;

- среднее время ожидания обслуживания ;

- средняя длина очереди , т. е. количество требований, ожидающих обслуживания;

- среднее число занятых обслуживающих устройств (среднее число требований, находящихся в процессе обслуживания).

Среднее число требований , находящихся в системе, определяется по формуле

,

где  – интенсивность потока требований в системе;

– интенсивность обслуживания;

 – среднее время ожидания обслуживания;

 – средняя продолжительность пребывания требования в системе, причем

.

Среднее число требований в узле обслуживания

,

где *M* – число обслуживающих устройств;

 – коэффициент использования системы.

Среднее число требований, находящихся в очереди,

.

Среднее время ожидания для всех поступающих требований

.

расчетные формулы для определения основных показателей открытых систем массового обслуживания с ожиданием в зависимости от распределения времени обслуживания при простейшем входящем потоке и обслуживании в порядке поступления требований даны в табл. 12.

Если отказаться от предположения о простейшем характере входящего потока, то удается аналитически получить лишь оценочные формулы для некоторых параметров системы. Так, например, если входящий поток произвольный рекуррентный, то для времени ожидания обслуживания



где  и  – дисперсии интервалов входящего потока и облуживания.

Для эрланговского входящего потока

,

,

где ,  – коэффициенты вариации входящего потока и обслуживания.

При других входящих потоках даже получение такого рода оценок представляет значительную трудность. В этом случае целесообразно определять показатели функционирования систем массового обслуживания методом статистического моделирования.

**4.7 Примеры использования показателей качества для оценки функционирования систем массового обслуживания**

***Пуассоновский входящий поток и показательное распределение времени обслуживания***

**Пример.** В вокзальном помещении находится одна билетная касса. В среднем за 1 ч в нее обращается 15 человек, а кассир обслуживает каждого пассажира 3,0 мин. Определим среднюю длину очереди и среднее время ожидания обслуживания, если прибывающий в кассу поток пассажиров простейший, а время обслуживания распределено по показательному закону.

**Решение.** Средняя интенсивность обслуживания пасс/ч.

Коэффициент загрузки кассира 

Средняя длина очереди 

Среднее время ожидания обслуживания 

***Пуассоновский входящий поток и произвольное распределение времени обслуживания***

Таблица 12

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Распределение  времени  обслуживания | Среднее время | | | Среднее число требований | | |
| ожидания обслуживания | обслуживания | нахождения в системе (в ожидании и процессе обслуживания) | ожидающих обслуживания | находящихся в процессе обслуживания | в системе (в ожидании и в процессе обслуживания) |
| О д н о к а н а л ь н ы е с и с т е м ы | | | | | | |
| Постоянное |  |  |  |  |  |  |
| Показательное |  |  |  |  |  |  |
| Эрланговское |  |  |  |  |  |  |
| Произвольное |  |  |  |  |  |  |
| М н о г о к а н а л ь н ы е с и с т е м ы (число каналов *М*) | | | | | | |
| Постоянное |  |  |  |  |  |  |
| Показательное |  |  |  |  |  |  |
| Эрланговское |  |  |  |  |  |  |
| Произвольное |  |  |  |  |  |  |

\*) 

**Пример.** Каждый час на путях сортировочного парка в среднем накапливается 1,5 состава. Закон распределения величины интервала между моментами окончания накопления составов – показательный. Закон распределения времени занятости маневрового локомотива формированием поезда – произвольный с математическим ожиданием  ч и средним квадратическим отклонением  ч. Определим средний простой и среднее число составов, ожидающих формирования.

**Решение.** Коэффициент вариации времени формирования 

Среднечасовая интенсивность формирования составов и коэффициент загрузки маневрового локомотива соответственно:

состава; 

Средний простой состава в ожидании формирования



а среднее число составов в очереди



***Пуассоновский входящий поток и постоянное распределение времени обслуживания***

**Пример.** Автомат по продаже билетов выдает билет за 15 с. Обращаются к нему с интенсивностью λ=180 пассажиров/ч; закон распределения пассажиропотока – пуассоновский. Определим среднее время ожидания получения билета и среднее число пассажиров в очереди.

**Решение.** Интенсивность обслуживания  пассажиров/ч.

Коэффициент загрузки автомата 

Средняя длительность нахождения пассажира в очереди

ч=22,5 с,

а средняя продолжительность ожидания пассажиром билета 

Среднее число пассажиров в очереди 

***Эрланговский входящий поток и эрланговское распределение времени обслуживания***

**Пример.** На сортировочную станцию ежесуточно поступает в расформирование *N*p=72 поезда. Коэффициент вариации входящего на горку поездо-потока *ϑ*вх=2,5 поезда/ч. Поступление их подчиняется биноминальному закону распределения, минимальный интервал *I*min=6мин. Время осмотра состава бригадой ПТО в среднем составляет 18 мин, коэффициент вариации продолжительности осмотра *ϑ*обсл=0,3. Определим среднее число составов, ожидающих технического осмотра в парке станции.

**Решение.** Средняя интенсивность обработки состава бригадой ПТО  состава/ч.

Коэффициент загрузки бригады 

Среднее число составов, ожидающих технического осмотра



***Расчет оптимального числа маневровых локомотивов и вытяжек формирования в сортировочном парке***

В связи с неравномерностью процесса накопления в сортировочном парке возникают непроизводительные простои составов в ожидании окончания формирования, что вызывает задержку в продвижении вагонопотока и связанные с этим потери. Увеличивая число вытяжных путей и маневровых локомотивов, можно снизить величину непроизводительных простоев. Таким образом, возникает типичная задача отыскания оптимального решения, которая в рассматриваемом случае сводится к сопоставлению затрат на дополнительные вытяжные пути и маневровые локомотивы с экономией от сокращения простоя составов в сортировочном парке. Приведенные затраты на дополнительные локомотивы и вытяжные пути могут быть приведены по существующим нормам.

Простои составов в ожидании формирования могут быть определены по формулам теории массового обслуживания, для чего необходимо знать характер входящего потока составов и распределение времени обслуживания. Исследованиями последних лет установлено, что поток составов, накапливающихся в отдельном маневровом районе и в сортировочном парке в целом, можно считать простейшим, а время, затрачиваемое на окончание формирования и перестановку составов в парк отправления, имеет произвольное распределение или же в ряде случаев описывается распределением Эрланга с параметром .

При закреплении маневровых локомотивов за вытяжными путями сортировочный парк и вытяжки формирования с работающими на них локомотивами будут представлять собой ряд одноканальных (по числу локомотивов) систем массового обслуживания. Следовательно, среднее время ожидания окончания формирования с учетом равномерного распределения работы между локомотивами может быт определено по следующим формулам:

- при произвольном распределении времени обслуживания с коэффициентом вариации 

,

где  – загрузка одного маневрового локомотива;

 – число составов, накапливающихся в одном маневровом районе за час;

 – число составов, которое может быть сформировано и переставлено за час из сортировочного в отправочный парк одним маневровым локомотивом;

- при эрланговском распределении времени обслуживания с параметром *k*

.

Необходимые для расчета значения  и  могут быть подсчитаны по следующим формулам:

, ,

где  – суточный перерабатываемый вагонопоток;

– средняя величина накапливаемых составов, вагонов;

 – число маневровых локомотивов и вытяжек формирования;

 – среднее время, затрачиваемое на окончание формирования состава, перестановку его в отправочный парк и возвращение локомотива обратно в сортировочный парк.

Рассмотрим пример. Необходимо определить оптимальное число вытяжек формирования и маневровых локомотивов при следующих исходных данных: ваг.; среднее число вагонов в составе ваг.; вес состава – 3000 т.; приведенные расходы на маневровый локомотив и вытяжной путь для формирования составов в сортировочном парке составляет  у.д.е./сут. (у.д.е. – условная денежная единица); приведенные расходы на 1 ч простоя состава грузового поезда составляют 89,9 у.д.е.; среднее время, затрачиваемое на окончание формирования, перестановку состава и возвращение локомотива, ч; коэффициент вариации величины времени  ; маневровый локомотив – ТЭМ-2.

1. Определяем минимально необходимое число маневровых локомотивов

.

1. Определяем средний простой в ожидании окончания формирования при двух маневровых локомотивах ()

; ; ;

ч.

1. Определяем величину  при трех маневровых локомотивах и вытяжных путях

; ;

ч.

1. Определяем значение  при четырех маневровых локомотивах и вытяжных путях

; ;

ч.

1. Определяем суточную экономию от сокращения простоя составов при введении третьего  и четвертого  локомотивов

 у.д.е.;

 у.д.е.

Здесь  – приведенные расходы на один час простоя состава.

Сравнивая значения  и  с суточными приведенными расходами на дополнительный маневровый локомотив ТЭМ-2 и вытяжку формирования, которые равны 15001600 у.д.е., видим, что введение третьего маневрового локомотива экономически целесообразно, а четвертого – нет. Таким образом, при принятых исходных данных на станции необходимо иметь три вытяжки формирования с работающими на них тремя локомотивами.