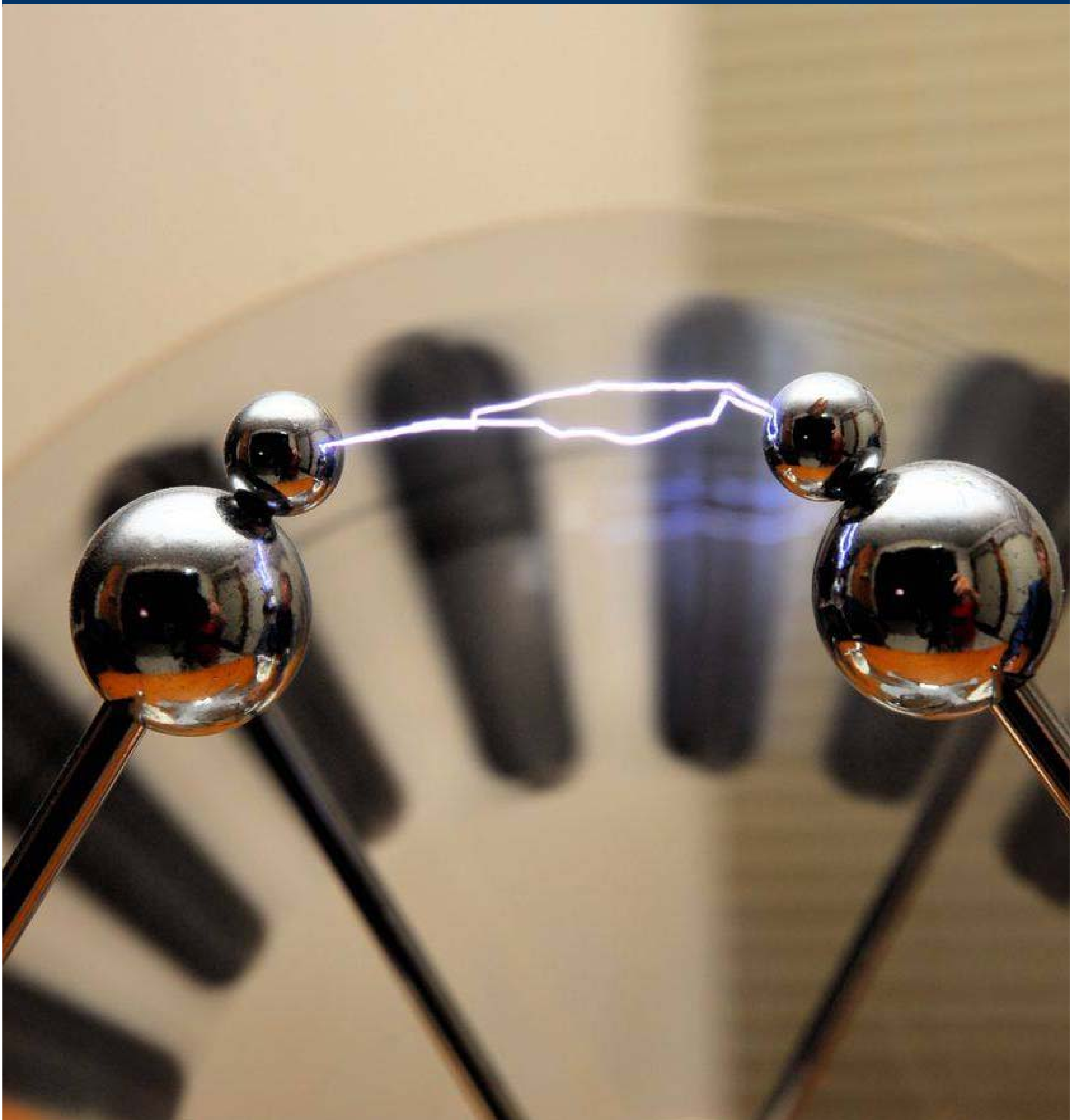
# Виртуальный курс физики
# Электричество и магнетизм

## Электростатика. Задачи с решениями



## Электричество и магнетизм

## Электростатика

### Задачи с решениями

З а д а ч а 1. Два положительных точечных заряда находятся в вакууме на расстоянии 50 см друг от друга. Величина одного заряда вдвое больше величины другого. На прямой, их соединяющей, находится в равновесии заряженный маленький шарик. Определить расстояние от этого шарика до большего заряда.

| Дано: | |
|---|---|
| $R = 0{,}5$ м, $q_2 = 2q_1$ | |
| $r_X = ?$ | |

*Решение.* Предположим, что расположенный на прямой шарик заряжен положительно (рис. 9.1). На шарик с зарядом $q_3$ действуют электрические силы взаимодействия $\mathbf{F}_{31}$ и $\mathbf{F}_{32}$ с зарядами $q_1$ и $q_2$ соответственно.

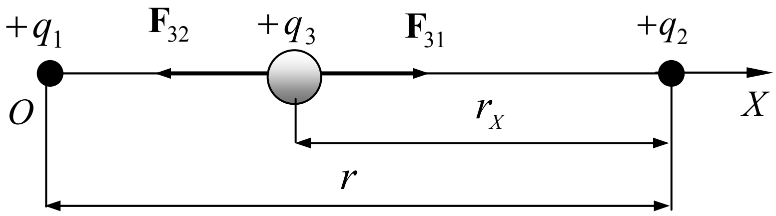



Рис. 9.1

Запишем условие равновесия шарика в проекции на ось *OX:*

$$F_{31} - F_{32} = 0, \text{ откуда } F_{31} = F_{32}.$$

Силы отталкивания зарядов записываем в виде

$$F_{31} = k\frac{q_1 q_3}{(r - r_X)^2}, \quad F_{32} = k\frac{q_2 q_3}{r_X^2} = k\frac{2q_1 q_3}{r_X^2}.$$

Поскольку $F_{31} = F_{32}$, получаем

$$k\frac{q_1 q_3}{(r - r_X)^2} = k\frac{2q_1 q_3}{r_X^2}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{(r - r_X)^2} = \frac{2}{r_X^2}.$$

Отсюда находим

$$r_X^2 = 2(r - r_X)^2, \qquad r_X = r(2 \pm \sqrt{2}).$$

Знак «+» перед корнем не подходит по условию. Значит,

$$r_X = r(2 - \sqrt{2}) = 0{,}586r, \qquad r_X = 0{,}586 \cdot 0{,}5 = 0{,}293 \text{ м}.$$

Если шарик заряжен отрицательно, то силы $\mathbf{F}_{31}$ и $\mathbf{F}_{32}$ поменяются местами. В остальном решение не изменится. Равновесие шарика будет неустойчивым.

*Ответ*: $r_X = 0{,}293$ м.

З а д а ч а 2. Два заряженных шарика взаимодействуют в воздухе с некоторой силой. Известно, что если уменьшить расстояние между шариками на определенную величину, то сила взаимодействия будет равна 16 мкН, а если увеличить расстояние на ту же величину, то сила взаимодействия составит 9 мкН. Найдите эту силу.

| Дано: | *Решение.* Предположим, что точечные заряды $q_1$ и $q_2$ находятся на расстоянии $r$ друг от друга (рис. 9.2). |
|---|---|
| $F_1 = 16$ мкН $= 16 \cdot 10^{-6}$ Н,<br>$F_2 = 9$ мкН $= 9 \cdot 10^{-6}$ Н | |
| $F = ?$ | |

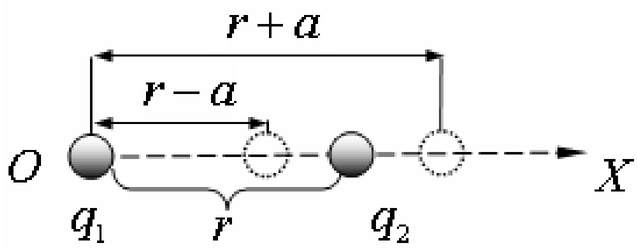



Рис. 9.2

Согласно закону Кулона

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Если обозначить через $a$ величину, на которую по условию задачи изменяют расстояние $r$ между зарядами, то

$$F_1 = k\frac{q_1 q_2}{(r-a)^2}, \quad F_2 = k\frac{q_1 q_2}{(r+a)^2}.$$

Решив систему уравнений относительно $r$, получим

$$r = \frac{\sqrt{q_1 q_2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{F_1}} + \frac{1}{\sqrt{F_2}}\right).$$

Затем подставим найденное значение $r$ в выражение для силы $F$:

$$F = \frac{4}{\left(\frac{1}{\sqrt{F_1}} + \frac{1}{\sqrt{F_2}}\right)^2}.$$

Подставляя численные значения, находим $F = 12 \cdot 10^{-6}$ Н.

*Ответ*: $F = 12 \cdot 10^{-6}$ Н.

З а д а ч а 3. Два заряженных шарика, подвешенных на нитях одинаковой длины, опущены в керосин. Какой должна быть плотность материала шариков, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и керосине был один и тот же? Относительная диэлектрическая проницаемость керосина ε = 2, плотность керосина $\rho_к = 800$ кг/м$^3$.

| Дано: | |
|---|---|
| $\alpha_1 = \alpha_2 = \text{const}$, $\varepsilon = 2$, <br> $\rho_к = 0{,}8$ г/см$^3$ = <br> = 800 кг/м$^3$ | *Решение.* На каждый шарик в воздухе после того как они разошлись, действуют три силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила натяжения нити $\mathbf{T}_1$ и сила Кулона $\mathbf{F}_1$ (рис. 9.3). Так как шарики находятся в равновесии, сумма всех сил, действующих на каждый из них, равна нулю: |
| $\rho_ш = ?$ | |

$$\mathbf{T} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_1 = 0\,.$$

Условия равновесия в проекциях на оси $OX$ и $OY$ запишем в виде

$$F_1 - T_1 \sin\alpha_1 = 0,$$
$$T_1 \sin\alpha_1 = F_1,$$

или

$$T_1 \cos\alpha_1 - mg = 0,$$
$$T_1 \cos\alpha_1 = mg.$$

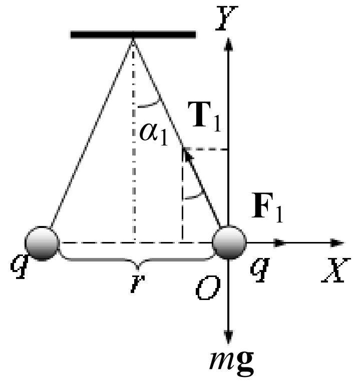


Рис. 9.3

Разделив почленно первое уравнение на второе, получим

$$\text{tg}\alpha_1 = \frac{F_1}{mg}.$$

Учитывая, что сила Кулона равна $F_1 = k\dfrac{q^2}{r^2}$, получаем

$$\text{tg}\alpha_1 = \frac{kq^2}{r^2 mg}.$$

При погружении шариков в керосин на каждый из них действуют сила электростатического отталкивания $\mathbf{F}_2$, сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила натяжения нити $\mathbf{T}_2$ и выталкивающая сила $\mathbf{F}_А$ (рис. 9.4). Условия равновесия в этом случае

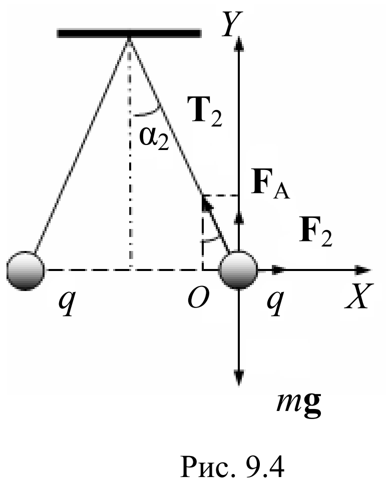


Рис. 9.4

$$F_2 - T_2 \sin\alpha_2 = 0,$$
$$F_А + T_2 \cos\alpha_2 - mg = 0.$$

Из этих уравнений получаем

$$T_2 \sin\alpha_2 = F_2, \quad T_2 \cos\alpha_2 = mg - F_{\text{А}},$$

или

$$\text{tg}\alpha_2 = \frac{kq^2}{\varepsilon r^2 (mg - F_{\text{А}})}.$$

Так как угол расхождения нитей не изменился, приравняв $\text{tg}\alpha_1 = \text{tg}\alpha_2$, будем иметь

$$\frac{kq^2}{r^2 mg} = \frac{kq^2}{\varepsilon r^2 (mg - F_{\text{А}})}, \text{ или } mg = \varepsilon(mg - F_{\text{А}}).$$

Подставив в это выражение соотношения для выталкивающей силы $F_{\text{А}} = \rho_{\text{к}} Vg$ ($V$ – объем шарика) и массы шарика $m = \rho_{\text{ш}} V$, найдем

$$\rho_{\text{ш}} = \varepsilon(\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{к}}).$$

Отсюда

$$\rho_{\text{ш}} = \frac{\varepsilon \rho_{\text{к}}}{\varepsilon - 1}, \quad \rho_{\text{ш}} = \frac{2 \cdot 800}{2 - 1} = 1600 \text{ кг/м}^3.$$

*Ответ*: $\rho_{\text{ш}}$ = 1600 кг/м$^3$.

З а д а ч а 4. В вершинах при острых углах ромба, составленного из двух равносторонних треугольников со стороной 0,25 м, расположены заряды по 5 нКл. В вершину при одном из тупых углов ромба помещен заряд, равный –2,5 нКл. Определите напряженность электрического поля в четвертой вершине ромба. Какая сила будет действовать на заряд 2 нКл, помещенный в эту вершину?

| Дано: |
| --- |
| $q_1 = q_2 = 5$ нКл $= 5 \cdot 10^{-9}$ Кл, |
| $q_3 = -2{,}5$ нКл $= -2{,}5 \cdot 10^{-9}$ Кл, |
| $q_4 = 2$ нКл $= 2 \cdot 10^{-9}$ Кл, $l = 0{,}25$ м |
| $E = ?$ $F = ?$ |

*Решение.* На рис. 9.5 показано направление векторов напряженности электрических полей в точке $A$, создаваемых зарядами $q_1$, $q_2$ и $q_3$.

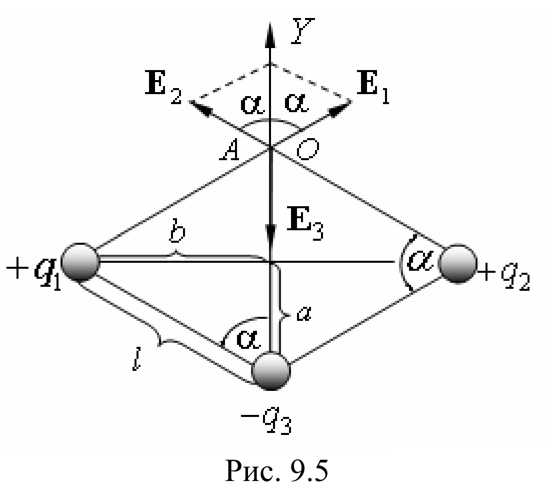


Рис. 9.5

Результирующая напряженность $\mathbf{E}$ в точке $A$ равна геометрической сумме всех векторов напряженности:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3.$$

В проекции на выбранное направление оси $OY$ имеем

$$E = E_1 \cos\alpha + E_2 \cos\alpha - E_3.$$

Величины этих векторов равны

$$E_1 = E_2 = k\frac{q_1}{l^2}, \quad E_3 = k\frac{q_3}{l^2}.$$

С учетом этого получаем

$$E = 2E_1\cos\alpha - E_3 = k\frac{2q_1\cos\alpha}{l^2} - k\frac{q_3}{l^2} = k\frac{2q_1\cos\alpha - q_3}{l^2}.$$

Из рисунка видно, что угол $\alpha$ = 60°. Подставляя численные данные, имеем

$$E = 9\cdot10^9\cdot\frac{2\cdot5\cdot10^{-9}\cos60° - 2{,}5\cdot10^{-9}}{0{,}25^2} = 360 \text{ В/м}.$$

Сила, действующая на заряд $q_4$, помещенный в точку $A$, может быть найдена из выражения

$$F = Eq_4 = k\frac{(2q_1\cos\alpha - q_3)q_4}{l^2},$$

$$F = 9\cdot10^9\cdot\frac{(2\cdot5\cdot10^{-9}\cos60° - 2{,}5\cdot10^{-9})\cdot2\cdot10^{-9}}{0{,}25^2} = 7{,}2\cdot10^{-7}\text{ Н}.$$

*Ответ*: $E$ = 360 В/м, $F = 7{,}2\cdot10^{-7}$ Н.

З а д а ч а 5. Две металлические концентрические сферы, расположенные в воздухе, имеют радиусы 0,2 и 0,4 м. На внутренней сфере находится заряд –3 нКл, а на внешней сфере – заряд 9 нКл. Найдите напряженность и потенциал поля в точках $A$, $B$ и $C$, расположенных на расстоянии 10, 30 и 60 см от центра сфер.

Дано:
$R_1$ = 0,2 м, $R_2$ = 0,4 м,
$q_1$ = –3 нКл = $-3\cdot10^{-9}$ Кл,
$q_2$ = 9 нКл = $9\cdot10^{-9}$,
$r_1$ = 10 см = 0,1 м,
$r_2$ = 30 см = 0,3 м,
$r_3$ = 60 см = 0,6 м

$E_A$ = ? $E_B$ = ? $E_C$ = ?
$\varphi_A$ = ? $\varphi_B$ = ? $\varphi_C$ = ?

*Решение*. Для решения задачи воспользуемся тем, что заряд, распределенный по поверхности сферы, создает вне сферы поле, подобное полю точечного заряда, расположенного в центре сферы (рис. 9.6).

В точке $C$, находящейся вне сфер, заряд малой сферы $q_1$ создает напряженность и потенциал, равные

$$E_{1C} = k\frac{q_1}{r_3^2}, \qquad \varphi_{1C} = k\frac{q_1}{r_3}.$$

Заряд большой сферы $q_2$ создает в той же точке напряженность и потенциал

$$E_{2C} = k\frac{q_2}{r_3^2}, \quad \varphi_{2C} = k\frac{q_2}{r_3}.$$

На основании принципа суперпозиции полей напряженность и потенциал поля в точке $C$ будут равны

$$\mathbf{E}_C = \mathbf{E}_{1C} + \mathbf{E}_{2C}, \quad \varphi_C = \varphi_{1C} + \varphi_{2C},$$

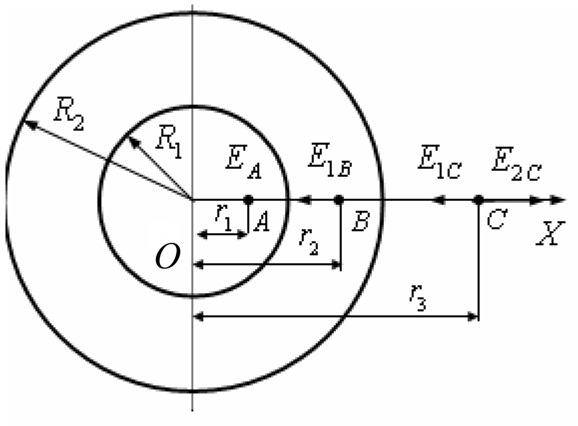



Рис. 9.6

или в проекции векторов напряженности на направление оси $OX$:

$$E_C = E_{2C} - E_{1C} = k\frac{q_2}{r_3^2} - k\frac{q_1}{r_3^2} =$$

$$= \frac{k}{r_3^2}(q_2 - q_1),$$

$$\varphi_C = k\frac{q_2}{r_3} + k\frac{q_1}{r_3} = \frac{k}{r_3}(q_2 + q_1).$$

Подставив численные значения, получим

$$E_C = \frac{9 \cdot 10^9}{0,36} \cdot (9 \cdot 10^{-9} - 3 \cdot 10^{-9}) = 150 \text{ В/м},$$

$$\varphi_C = \frac{9 \cdot 10^9}{0,6} \cdot (9 \cdot 10^{-9} - 3 \cdot 10^{-9}) = 90 \text{ В}.$$

Внутри большой сферы заряд $q_2$ создает напряженность поля $E_{2B} = 0$, и потенциал поля этого заряда будет одинаков для всех точек и равен

$$\varphi_{2B} = k\frac{q_2}{R_2}.$$

Заряд $q_1$ создает в этих же точках напряженность и потенциал

$$E_{1B} = k\frac{q_1}{r_2^2}, \quad \varphi_{1B} = k\frac{q_1}{r_2}.$$

Поэтому в пространстве между сферами (для точки $B$) результирующая напряженность и потенциал поля равны

$$E_B = -E_{1B} + E_{2B} = -k\frac{q_1}{r_2^2},$$

$$\varphi_B = \varphi_{1B} + \varphi_{2B} = k\frac{q_1}{r_2} + k\frac{q_2}{R_2} = k\left(\frac{q_1}{r_2} + \frac{q_2}{R_2}\right).$$

Подставляя численные данные, получаем

$$E_B = -9\cdot 10^9 \cdot \frac{3\cdot 10^{-9}}{0,09} = -300 \text{ В/м},$$

$$\varphi_B = 9\cdot 10^9 \cdot \left(\frac{-3\cdot 10^{-9}}{0,3} + \frac{9\cdot 10^{-9}}{0,4}\right) = 112,5 \text{ В}.$$

Соответственно внутри малой сферы (точка $A$) напряженности полей обоих зарядов $E_{1A} = E_{2A} = E_A = 0$, а потенциалы постоянны и равны

$$\varphi_{1A} = k\frac{q_1}{R_1}, \quad \varphi_{2A} = k\frac{q_2}{R_2}.$$

Поэтому

$$E_A = 0, \quad \varphi_A = \varphi_{1A} + \varphi_{2A} = k\frac{q_1}{R_1} + k\frac{q_2}{R_2} = k\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2}\right),$$

$$\varphi_A = 9\cdot 10^9 \cdot \left(\frac{-3\cdot 10^{-9}}{0,2} + \frac{9\cdot 10^{-9}}{0,4}\right) = 67,5 \text{ В}.$$

*Ответ*: $E_A = 0$, $\varphi_A = 67,5$ В, $E_B = -300$ В/м, $\varphi_B = 112,5$ В, $E_C = 150$ В/м, $\varphi_C = 90$ В.

З а д а ч а 6. Маленький металлический шарик массой 1 г подвешен на нити между горизонтальными пластинами плоского конденсатора. Период колебаний его в отсутствие зарядов 0,628 с. После того как верхняя пластина конденсатора и шарик были заряжены положительно, период колебаний стал равным 0,314 с. С какой силой действовало поле конденсатора на шарик?

Дано:
$T_0 = 0,628$ с, $T = 0,314$ с,
$m = 1$ г $= 10^{-3}$ кг

$F = ?$

*Решение*. Период колебаний шарика в отсутствие зарядов

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Отсюда

$$l = \frac{T_0^2 g}{4\pi^2},$$

где $l$ – длина маятника; $g$ – ускорение свободного падения.

В электрическом поле на шарик помимо силы тяжести $mg$ будет действовать направленная вниз сила $F = qE$, где $E$ – напряженность электрического поля конденсатора. При одновременном действии силы тяжести и силы электрического поля ускорение шарика в конденсаторе можно определить из второго закона Ньютона, записанного в скалярной форме:

$$mg' = mg + qE.$$

Отсюда следует, что

$$g' = g + \frac{qE}{m}.$$

Подставляя значение $g'$ в формулу периода колебаний маятника, находим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{qE}{m}}}, \quad \text{или } T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{T_0^2 g}{4\pi^2}}{g + \frac{F}{m}}}.$$

Возводя выражение в квадрат и решая его относительно $F$, получаем

$$F = \frac{T_0^2 - T^2}{T^2} mg, \quad F = \frac{0,628^2 - 0,314^2}{0,314^2} \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 = 29,4 \cdot 10^{-3}\,\text{Н}.$$

*Ответ*: $F = 29,4 \cdot 10^{-3}$ Н.

З а д а ч а 7. Расстояние между пластинами конденсатора 16 мм, длина пластин 3 см. На какое расстояние сместится электрон, влетающий в конденсатор со скоростью $2 \cdot 10^6$ м/с параллельно пластинам, к моменту выхода из конденсатора, если на пластины подано напряжение 4,8 В?

Дано:
$d$ = 16 мм = $1,6 \cdot 10^{-2}$ м,
$v_0 = 2 \cdot 10^6$ м/с, $l$ = 3 см = $3 \cdot 10^{-2}$ м,
$U$ = 4,8 В, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг,
$q_e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$h$ = ?

*Решение*. Рассмотрим движение электрона между пластинами конденсатора (рис. 9.7). На электрон в электрическом поле действует сила

$$F_к = q_e E.$$

Так как поле между пластинами плоского конденсатора однородно, имеем

$$E = \frac{U}{d},$$

следовательно,

$$F_{\text{к}} = \frac{q_e U}{d}.$$

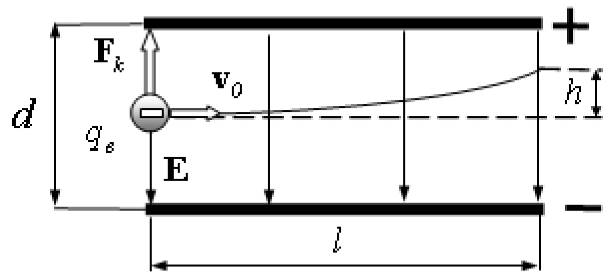


Рис. 9.7

Эта сила сообщает электрону ускорение, которое направлено перпендикулярно пластинам конденсатора и равно

$$a = \frac{F_{\text{к}}}{m_e} = \frac{q_e U}{m_e d}.$$

Время движения электрона определяется из соотношения

$$t = \frac{l}{v_0}.$$

За время движения электрона в однородном поле плоского конденсатора он под действием силы $F_{\text{к}}$ смещается на расстояние

$$h = \frac{at^2}{2}.$$

Подставляя в формулу значения ускорения и времени движения, получаем

$$h = \frac{qUl^2}{2mdv_0^2}.$$

Путем расчетов находим

$$h = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 4{,}8 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-2} \cdot (2 \cdot 10^6)^2} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

*Ответ*: $h = 6 \cdot 10^{-3}$ м.

З а д а ч а 8. Восемь маленьких капель ртути, каждая из которых была заряжена до потенциала 10 В, сливаются в одну большую каплю. Каков потенциал большой капли?

| Дано: | |
|---|---|
| $\varphi = 10$ В, $n = 8$ | |
| $\varphi' = ?$ | |

*Решение*. Считаем, что капли ртути имеют форму шара. Тогда потенциалы маленькой $\varphi$ и большой $\varphi'$ капель можно записать в виде

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad \varphi' = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

где $q$, $q'$ – заряды маленькой и большой капель, а $r$ и $R$ – их радиусы.

Заряд большой капли $q'$ согласно закону сохранения электрических зарядов равен сумме зарядов маленьких капель:

$$q' = nq.$$

Радиус большой капли найдем из условия, что масса большой капли равна сумме масс маленьких:

$$M = nm.$$

Масса большой капли

$$M = \rho V' = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho,$$

где $V' = \frac{4}{3}\pi R^3$ – объем большой капли; $\rho$ – плотность ртути.

Масса маленькой капли

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$

Следовательно,

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho = n \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho,$$

откуда вытекает, что

$$R = r\sqrt[3]{n}.$$

Подставляя значения $q'$ и $R$ в формулу потенциала большой капли, получаем

$$\varphi' = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{nq}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt[3]{n}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sqrt[3]{n^2}.$$

С учетом того, что

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \varphi,$$

имеем

$$\varphi' = \varphi \sqrt[3]{n^2}.$$

В результате расчета находим $\varphi' = 10 \sqrt[3]{64} = 40$ В.

*Ответ*: $\varphi' = 40$ В.

Задача 9. Конденсаторы емкостью 2 и 3 мкФ заряжены до разности потенциалов 20 и 50 В соответственно. После зарядки конденсаторы соединены одноименными полюсами. Определите разность потенциалов между обкладками конденсаторов после их соединения.

| Дано: |
|---|
| $C_1 = 2$ мкФ $= 2\cdot10^{-6}$ Ф, |
| $C_2 = 3$ мкФ $= 3\cdot10^{-6}$ Ф, |
| $U_1 = 20$ В, $U_2 = 50$ В |
| $U = ?$ |

*Решение*. На основании закона сохранения электрического заряда имеем

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2',$$

где $q_1, q_2$ – заряды конденсаторов до соединения; $q_1', q_2'$ – заряды конденсаторов после соединения.

Так как

$$C_1 = \frac{q_1}{U_1},\ C_2 = \frac{q_2}{U_2},\ C_1 = \frac{q_1'}{U},\ C_2 = \frac{q_2'}{U},$$

находим

$$q_1 = C_1U_1,\ q_2 = C_2U_2,\ q_1' = C_1U,\ q_2' = C_2U.$$

Подставляя полученные значения зарядов в выражение закона сохранения электрического заряда, получаем

$$C_1U_1 + C_2U_2 = C_1U + C_2U,\ \text{или}\ C_1U_1 + C_2U_2 = U(C_1 + C_2).$$

Отсюда следует, что

$$U = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2},\quad U = \frac{2\cdot10^{-6}\cdot20 + 3\cdot10^{-6}\cdot50}{2\cdot10^{-6} + 3\cdot10^{-6}} = 38\ \text{В}.$$

*Ответ*: $U = 38$ В.

З а д а ч а 10. Заряженный шар радиусом 2 см соединяют тонким длинным проводником с незаряженным шаром, радиус которого 3 см. После того как шары разъединили, энергия второго шара оказалась равной 0,4 Дж. Каким зарядом обладал первый шар до соединения? Электроемкостью соединительного проводника следует пренебречь.

| Дано: | |
|---|---|
| $R_1 = 2$ см $= 2 \cdot 10^{-2}$ м, | |
| $R_2 = 3$ см $= 3 \cdot 10^{-2}$ м, | |
| $W_п = 0{,}4$ Дж | |
| $q = ?$ | |

*Решение.* Оба шара до соединения имеют емкости

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1,$$
$$C_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2.$$

Заряд $q$, которым располагает первый шар до соединения, после соединения распределится по обоим шарам таким образом, что их потенциалы станут одинаковыми:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{C_1} = \varphi_2 = \frac{q_2}{C_2} = \varphi,$$

где $q_1$ и $q_2$ – заряды на шарах после их соединения. Причем

$$q = q_1 + q_2, \text{ или } q = C_1\varphi + C_2\varphi = 4\pi\varepsilon_0(R_1 + R_2)\varphi.$$

Энергия второго шара после разъединения

$$W_п = \frac{C_2\varphi^2}{2},$$

откуда

$$\varphi = \sqrt{\frac{2W_п}{C_2}} = \sqrt{\frac{2W_п}{4\pi\varepsilon_0 R_2}}.$$

Подставляя значение $\varphi$ в выражение для заряда $q$, получаем

$$q = 4\pi\varepsilon_0(R_1 + R_2)\sqrt{\frac{2W_п}{4\pi\varepsilon_0 R_2}}.$$

В результате подстановки численных значений из условия задачи имеем

$$q = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^{-2}\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}4}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^{-2}}} = 2{,}7 \cdot 10^{-6}\,\text{Кл}.$$

*Ответ*: $q = 2{,}7 \cdot 10^{-6}$ Кл.

З а д а ч а 11. Два одинаковых воздушных конденсатора емкостью $10^3$ пФ каждый заряжены до напряжения 600 В. Один из конденсаторов в заряженном состоянии погружается в керосин, после чего конденсаторы соединяются параллельно. Определите работу происходящего при этом разряда. Диэлектрическая проницаемость керосина ε = 2.

Дано:
$C_1 = C_2 = C = 10^3$ пФ $= 10^{-9}$ Ф,
$U = 600$, $\varepsilon = 2$

$A = ?$

*Решение*. До погружения в керосин энергия каждого конденсатора составляла

$$W_{п1} = \frac{q^2}{2C}.$$

После погружения одного конденсатора в керосин (отсоединенного предварительно от источника питания) заряд его остается неизменным, а емкость увеличивается в ε раз, поэтому его энергия принимает вид

$$W'_{п1} = \frac{q^2}{2C\varepsilon}.$$

Общая энергия конденсаторов до соединения

$$W_{п2} = W_{п1} + W'_{п1} = \frac{q^2}{2C} + \frac{q^2}{2C\varepsilon} = \frac{q^2(1+\varepsilon)}{2C\varepsilon}.$$

При параллельном соединении этих конденсаторов происходит перетекание заряда с одного на другой до выравнивания разностей потенциалов между обкладками. Общий заряд конденсаторов остается при этом неизменным:

$$q_{общ} = 2q.$$

Емкость образовавшейся батареи равна сумме емкостей конденсаторов:

$$C_{общ} = C + \varepsilon C = C(1+\varepsilon).$$

Энергия этой батареи

$$W_з = \frac{q_{общ}^2}{2C_{общ}} = \frac{4q^2}{2C(\varepsilon+1)}.$$

Работа разряда будет равна изменению энергии конденсаторов:

$$A = \Delta W = W_{п3} + W_{п2} = \frac{4q^2}{2C(\varepsilon+1)} - \frac{q^2(1+\varepsilon)}{2C\varepsilon} = -\frac{q^2(\varepsilon-1)^2}{2C\varepsilon(\varepsilon+1)}.$$

Так как заряд $q = CU$, имеем

$$A = -\frac{CU^2(\varepsilon-1)^2}{2\varepsilon(\varepsilon+1)}, \text{ или } A = -\frac{10^{-9}\cdot 600^2\cdot(2-1)^2}{2\cdot 2\cdot(2+1)} = -\,3\cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

Знак «–» указывает на то, что работа разряда совершается в результате уменьшения энергии батареи конденсаторов.

*Ответ*: $A = -3\cdot 10^{-5}$ Дж.

З а д а ч а 12. Электрон летит на отрицательный ион. Заряд иона равен трем зарядам электрона. В начальный момент электрон находится на очень большом расстоянии от иона и имеет скорость, равную $10^5$ м/с. На какое наименьшее расстояние электрон может приблизиться к иону?

| Дано: |
|---|
| $q_1 = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл, $q_2 = 3q_1$, |
| $v_0$ = 10 м/с, |
| $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг |
| $r$ = ? |

*Решение*. На электрон при его движении в электрическом поле иона действует электрическая сила, работа которой равна изменению кинетической энергии электрона:

$$A = \Delta W_к,$$

где

$$\Delta W_к = W_к - W_{к0} = 0 - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{mv_0^2}{2}.$$

Однако

$$A = q_1(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где $\varphi_1$ и $\varphi_2$ – потенциалы, создаваемые ионом в точках, между которыми перемещается электрон. Полагая $\varphi_1 = 0$ (в начальный момент электрон находился на очень большом расстоянии от иона) и $\varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, получаем

$$A = q_1\left(0 - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Наименьшее расстояние, на которое приблизится электрон к иону, определим из условия

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{mv_0^2}{2},$$

откуда

$$r = \frac{q_1 q_2}{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2},$$

$$r = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{10}} = 1{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

*Ответ*: $r = 1{,}5 \cdot 10^{-7}$ м.