Виртуальный курс физики

МЕХАНИКА

Статика. Задачи с решениями

МЕХАНИКА

Статика

Задачи с решениями

З а д а ч а 1. С какой минимальной силой следует прижать брусок массой 1 кг к вертикальной стенке, чтобы он не скользил? Коэффициент трения бруска о стенку равен 0,2.

Дано:
$m = 1$ кг, $\mu = 0{,}2$

$F_{\min} = ?$

Решение. Рассмотрим все силы, приложенные к бруску (рис. 4.1): $\mathbf{F}_{\min}$ – минимальная внешняя сила, прижимающая брусок к стенке; $m\mathbf{g}$ – сила тяжести, действующая на него; $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ – сила трения между бруском и стенкой; $\mathbf{N}$ – нормальная реакция стенки.

В соответствии с условием равновесия тела, не имеющего оси вращения,

$$\mathbf{F}_{\min} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{тр}} + \mathbf{N} = 0.$$

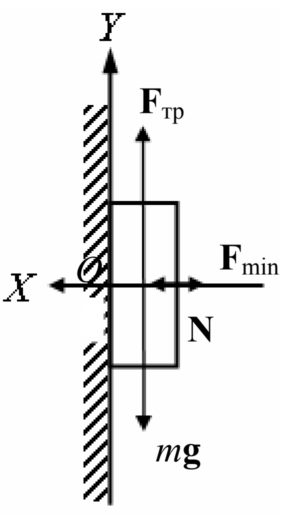

Рис. 4.1

В проекциях на оси координат это условие запишем следующим образом:

$$OX: F_{\min} - N = 0,$$
$$OY: F_{\text{тр}} - mg = 0.$$

Решая совместно эти уравнения и используя закон трения, в соответствии с которым $F_{\text{тр}} = \mu N$, получаем

$$F_{\min} = \frac{mg}{\mu}.$$

В результате вычислений имеем $F_{\min} = 49$ Н.

Ответ: $F_{\min} = 49$ Н.

З а д а ч а 2. Груз, масса которого равна 15 кг, подвешен с помощью двух нитей таким образом, что одна из них образует с вертикалью угол, равный 30°, другая оказывается натянутой горизонтально. Найти силы натяжения нитей.

Дано:	
$m = 15$ кг, $\alpha = 30°$	*Решение.* Расмотрим все силы, приложенные к грузу (рис. 4.2) и запишем условие его равновесия: $\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + m\mathbf{g} = 0$. В проекциях на оси координат это условие выразится следующим образом:
$T_1 = ?$ $T_2 = ?$	

$$OX: T_2 - T_1 \sin\alpha = 0,$$
$$OY: T_1 \cos\alpha - mg = 0.$$

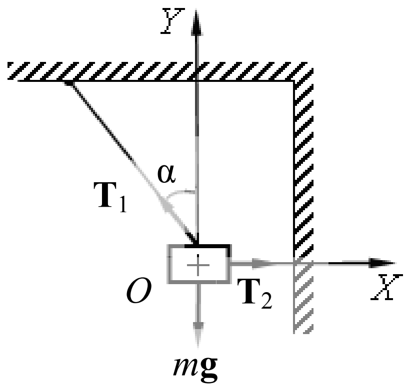

Рис. 4.2

Решая совместно полученные скалярные уравнения, находим

$$T_1 = \frac{mg}{\cos\alpha}, \; T_2 = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

В результате подстановки численных значений m, α и g получаем

$$T_1 = 169 \text{ Н}, \; T_2 = 84{,}5 \text{ Н}.$$

Ответ: $T_1 = 169$ Н, $T_2 = 84{,}5$ Н.

З а д а ч а 3. Два шара, массы которых равны соответственно 3 и 5 кг, соединены стержнем с массой 2 кг. Определить положение центра тяжести этой системы, если радиус первого шара равен 5 см, радиус второго – 7 см, а длина стержня составляет 0,3 м.

Дано:	
$m_1 = 3$ кг, $m_2 = 5$ кг, $m_3 = 2$ кг, $R_1 = 0{,}05$ м, $R_2 = 0{,}07$ м, $d = 0{,}3$ м	*Решение.* Для нахождения центра тяжести воспользуемся условием равновесия тела, имеющего неподвижную ось вращения, которая проходит через центр тяжести системы, расположенный в точке C (рис. 4.3):
$x = ?$	

$$M_1 - M_2 + M_3 = 0,$$

где $M_1 = m_1 g d_1$, $M_2 = m_2 g d_2$, $M_3 = m_3 g d_3$ – моменты сил, действующих на систему, относительно центра тяжести. При этом плечи сил определяются выражениями

$$d_1 = \frac{d}{2} + x + R_1,$$

$$d_2 = \frac{d}{2} - x + R_2,$$

$$d_3 = x.$$

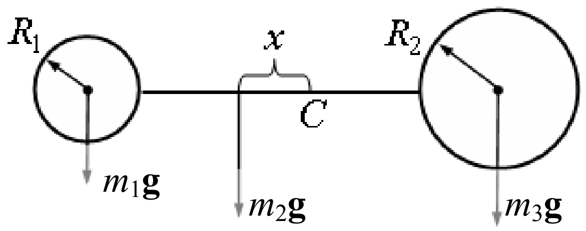

Рис. 4.3

С учетом этого условие равновесия запишем таким образом:

$$m_1 g \left(\frac{d}{2} + x + R_1\right) - m_2 g \left(\frac{d}{2} - x + R_2\right) + m_3 g x = 0.$$

Решив уравнение относительно x, получим

$$x = \frac{m_2 R_2 - m_1 R_1 + \frac{d}{2}(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

В результате подстановки в это выражение значений известных величин имеем $x = 0{,}05$ м.

Ответ: $x = 0{,}05$ м.

З а д а ч а 4. В однородном диске одинаковой толщины, радиус которого равен 1 м, вырезано круглое отверстие таким образом, как это показано на рисунке. Найти положение центра тяжести диска с учетом выреза.

Дано:	
$R = 0{,}9$ м,	*Решение.* Центр тяжести однородного тела с учетом выреза можно найти при условии, что известны центры тяжести этого тела без выреза и центр тяжести вырезанной части тела (рис. 4.4). При этом указанные центры тяжести
$r = 0{,}45$ м	
$x_c = ?$	

(для рассматриваемой задачи это точки O и O_1) следует расположить на одной горизонтальной прямой (такой прямой в данном случае является ось OX).

Если бы диск массой m не имел выреза, то на него действовала бы сила тяжести $m\mathbf{g}$, приложенная в точке O. При этом

$$m\mathbf{g} = m_1\mathbf{g} + m_2\mathbf{g},$$

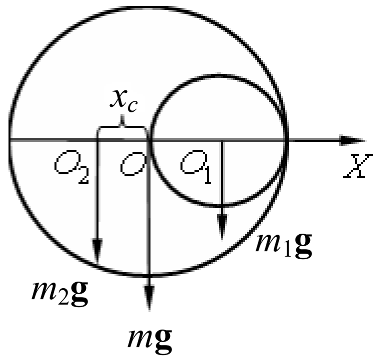

Рис. 4.4

где $m_1\mathbf{g}$ – сила тяжести, действующая на вырезанную часть и приложенная в точке O_1, а $m_2\mathbf{g}$ – сила тяжести, действующая на диск с вырезом и приложенная в некоторой точке O_2, положение которой требуется найти (m_1 и m_2 – массы, соответствующие вырезанной части диска и диску с вырезом).

Запишем условие равновесия диска относительно оси OZ, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа:

$$m_1 g\frac{R}{2} - m_2 g x_c = 0,$$

где x_c – расстояние от оси OZ до точки O_2. Из уравнения, выражающего условие равновесия, получаем

$$x_c = \frac{Rm_1}{2m_2}.$$

Так как диск однородный и имеет постоянную толщину, массы m_1 и m_2 пропорциональны площадям S_1 и S_2 соответствующих фигур: $m_1 = \tau S_1$, $m_2 = \tau S_2$, где τ – поверхностная плотность материала, из которого изготовлен диск.

Таким образом,

$$x_c = \frac{R}{2}\cdot\frac{\tau S_1}{\tau S_2} = \frac{R}{2}\cdot\frac{S_1}{S_2},$$

где $S_1 = \pi r^2$; $S_2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$.

Учитывая, что $\frac{R}{2} = r$, получаем

$$x_c = r\frac{\pi r^2}{\pi(4r^2 - r^2)} = \frac{r}{3}.$$

Подставляя значение r, находим $x_c =$ 0,15 м.

Ответ: $x_c = 0{,}15$ м.

З а д а ч а 5. Лестница длиной 4 м приставлена к абсолютно гладкой стене под углом 60° к горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между полом и лестницей равен 0,33. На какую высоту от пола может подняться по лестнице человек, прежде чем лестница начнет скользить. Массой лестницы следует пренебречь.

Дано:	
$l = 4$ м, $\alpha = 60°$, $\mu = 0{,}33$	*Решение.* Рассмотрим силы, действующие на лестницу (рис. 4.5): $\mathbf{P}$ – сила давления человека на лестницу, $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ – силы нормальной реакции опоры стены и пола, $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ – сила трения.
$H = ?$	

Лестница может совершать два вида движения: двигаться поступательно вдоль оси OX и вращаться вокруг точки O.

Для решения задачи воспользуемся условием равновесия для поступательного движения: $\mathbf{N}_1 + \mathbf{P} + \mathbf{N}_2 + \mathbf{F}_{\text{тр}} = 0$, которое в проекциях на оси координат принимает следующий вид:

$$OX\text{:}\ F_{\text{тр}} - N_1 = 0,$$
$$OY\text{:}\ N_2 - \mathbf{P} = 0.$$

Условие равновесия (уравнение моментов) лестницы относительно неподвижной точки O запишем таким образом:

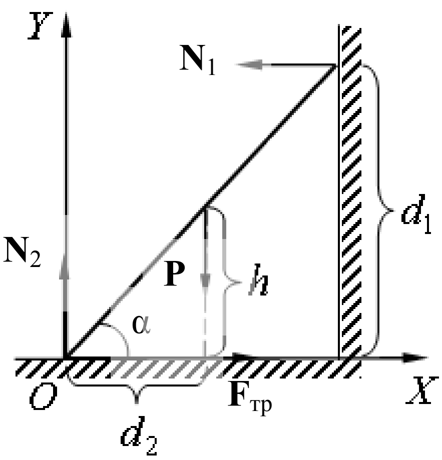

Рис. 4.5

$$M_2 - M_1 = 0,$$

где $M_1 = N_1 d_1$; $M_2 = P d_2$ – моменты сил $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{P}$ относительно точки O. В этих равенствах $d_1 = l\sin\alpha$, $d_2 = h\,\mathrm{ctg}\,\alpha$ – плечи сил $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{P}$ относительно той же точки. С учетом выражений для d_1 и d_2 условие равновесия примет следующий вид:

$$N_1 l\sin\alpha - Ph\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$h = \frac{N_1 l\sin\alpha}{P\,\mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

Из первого условия равновесия находим, что $N_1 = F_{\text{тр}}$. По закону трения $F_{\text{тр}} = \mu N_2$. Так как $N_2 = P$, имеем $N_1 = \mu P$. Таким образом,

$$h = \frac{Pl\sin\alpha}{P\mathrm{ctg}\alpha} = \frac{\mu l\sin\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}.$$

Подставив численные значения, получим $h =$ 1,15 м.

Ответ: h = 1,15 м.

З а д а ч а 6. Какую минимальную горизонтально направленную силу требуется приложить к шару массой 50 кг и радиусом 1 м, чтобы поднять его на вертикальную ступеньку высотой 30 см. Линия действия силы должна проходить через центр шара.

Дано:	
m = 50 кг, $R = 1$ м, h = 0,3 м	*Решение.* На шар действуют следующие силы: $\mathbf{F}$ – сила, с которой шар поднимают на ступеньку, $m\mathbf{g}$ – сила тяжести шара, $\mathbf{N}$ – реакция опоры, которой является ступенька.
$F_{\min} = ?$	

Для того чтобы поднять шар на ступеньку, необходимо, чтобы момент силы $\mathbf{F}$ относительно точки C (рис. 4.6) был равен моменту силы $m\mathbf{g}$ относительно этой точки:

$$Fd_1 = mgd_2,$$

где d_1 и d_2 – плечи сил $\mathbf{F}$ и $m\mathbf{g}$ относительно точки C.

С учетом выражений для d_1 и d_2 уравнение моментов запишем таким образом:

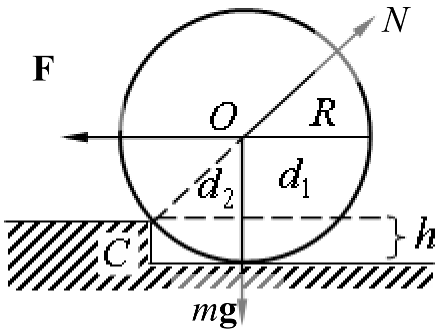

Рис. 4.6

$$F(r-h) = mg\sqrt{R^2-(R-h)^2}.$$

В этом равенстве $\boldsymbol{F}$ представляет собой минимальную силу:

$$F_{\min} = mg\frac{\sqrt{R^2-(R-h)^2}}{R-h}.$$

Подставив численные значения, получим $F_{\min} =$ 500 Н.

Ответ: $F_{\min} =$ 500 Н.