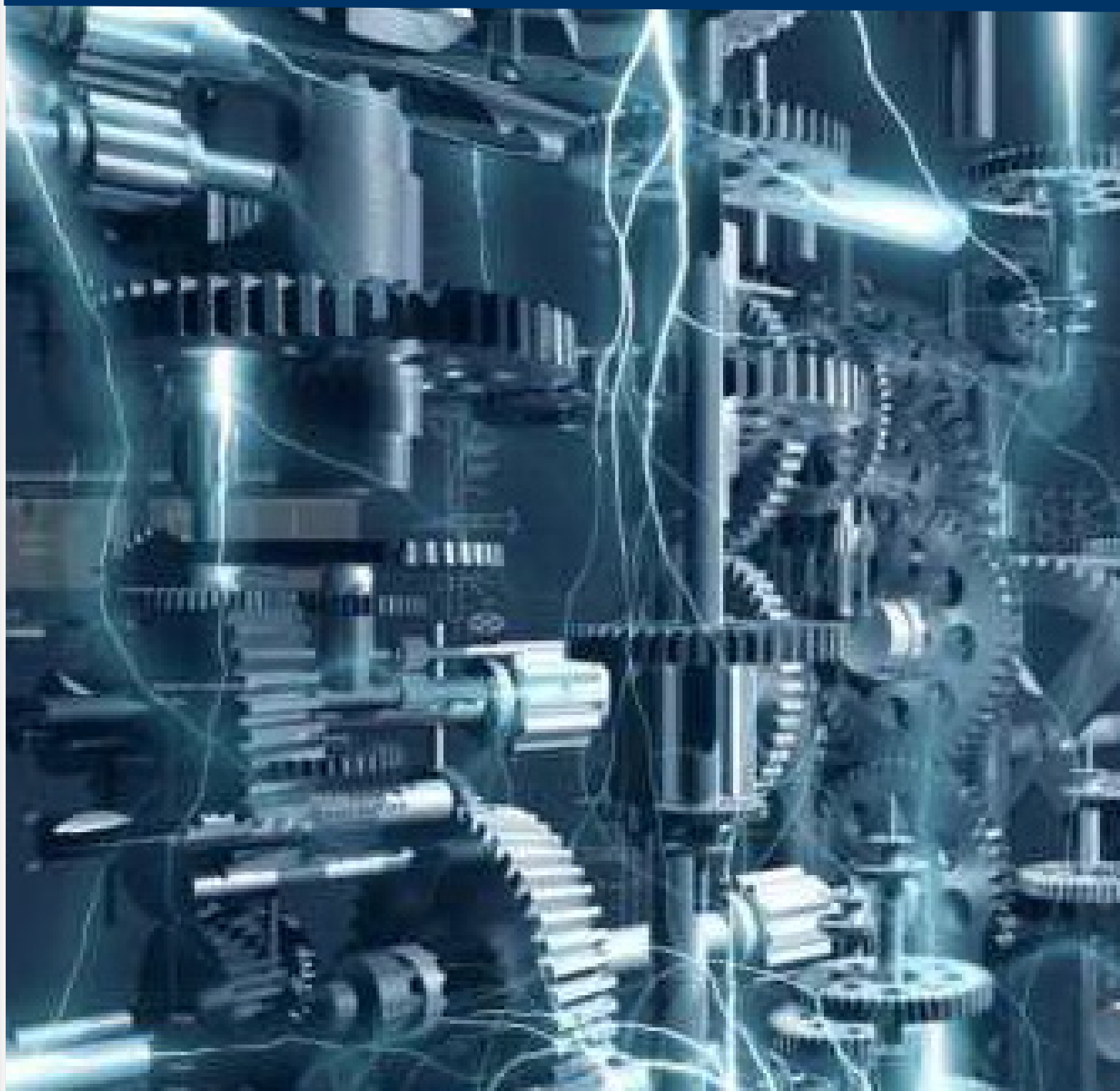


Виртуальный курс физики

МЕХАНИКА

Работа, мощность, энергия. Задачи с решениями



МЕХАНИКА

Работа, мощность, энергия. Законы сохранения в механике

Задачи с решениями

Задача 1. При вертикальном подъеме груза массой 2 кг на высоту 1 м постоянной силой была совершена работа 78,5 Дж. С каким ускорением поднимали груз?

Дано: $m = 2$ кг, $h = 1$ м, $A = 78,5$ Дж
$a = ?$

Решение. Уравнение движения груза имеет следующий вид (рис. 3.1):

$$\mathbf{F} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}.$$

В проекциях на вертикальную ось Y его записывают так:

$$F - mg = ma.$$

Для того чтобы найти ускорение, с которым поднимался груз, необходимо определить силу F .

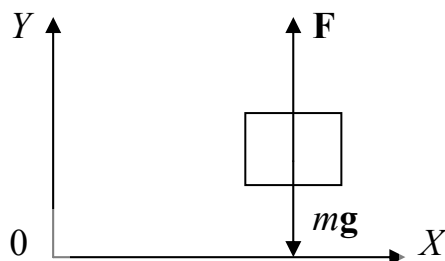


Рис. 3.2

Механическая работа постоянной силы по определению равна

$$A = Fr \cos \alpha.$$

В данной задаче $\alpha = 0$, так как направления векторов \mathbf{F} и \mathbf{r} совпадают, поэтому

$$F = \frac{A}{r} = \frac{A}{h}. \text{ Следовательно, } a = \frac{A}{mh} - g.$$

Расчеты приводят к результату $a = 29,5 \text{ м/с}^2$.

Ответ: $a = 29,5 \text{ м/с}^2$.

Задача 2. Вагон массой 20000 кг, движущийся равнозамедленно, под действием силы трения через некоторое время останавливается. Начальная скорость вагона равна 54 км/ч. Найти работу сил трения.

Дано: $m = 20000$ кг, $v_0 = 54$ км/ч = 15 м/с
$A_{\text{тр}} = ?$

Решение. Для определения работы сил трения воспользуемся теоремой о кинетической энергии. Так как вагон останавливается,

$$\Delta E_k = 0 - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{mv_0^2}{2}.$$

Силы, действующие на вагон, показаны на рис. 3.3. Работа сил тяжести и реакции опоры равна нулю, так как они перпендикулярны перемещению. Следовательно,

$$\Delta W_k = A_{\text{тр}}.$$

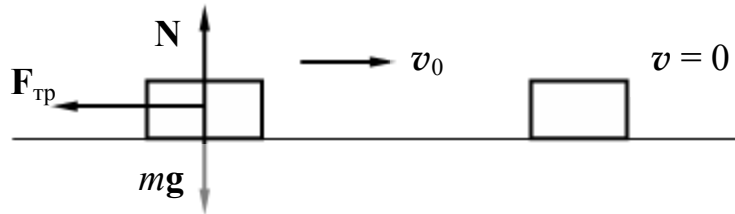


Рис. 3.3

Отсюда

$$A_{\text{тр}} = -\frac{mv_0^2}{2}.$$

Расчеты дают следующий результат: $A_{\text{тр}} = -22,5 \cdot 10^5$ Дж.

Ответ: $A_{\text{тр}} = -22,5 \cdot 10^5$ Дж.

З а д а ч а 3. Подъемный кран поднимает груз массой 5 т на высоту 16 м. За какое время будет поднят этот груз, если мощность двигателя крана 10 кВт и КПД его 80 %?

Дано:
 $m = 5 \text{ т} = 5000 \text{ кг},$
 $h = 16 \text{ м},$
 $N = 10 \text{ кВт},$
 $\eta = 80 \%$

 $t = ?$

Решение. В соответствии с условиями задачи полезная мощность крана

$$N_{\text{пол}} = \eta N.$$

Работа, совершаемая краном при поднятии груза:

$$A_{\text{пол}} = mgh.$$

Так как по определению $N_{\text{пол}} = \frac{A_{\text{пол}}}{t}$, имеем

$$t = \frac{A}{N_{\text{пол}}} = \frac{mgh}{\eta N}.$$

Подставив численные данные из условия задачи, получим $t = 100$ с.

Ответ: $t = 100$ с.

З а д а ч а 4. Самолет для взлета должен иметь скорость 25 м/с. Длина пробега перед взлетом 100 м. Какова мощность двигателей, если масса самолета 1000 кг и коэффициент сопротивления 0,02?

Дано: $v = 25 \text{ м/с}, S = 100 \text{ м},$ $m = 1000 \text{ кг},$ $\mu = 0,02$ <hr/> $N = ?$	Решение. Мощность двигателей при взлете можно найти из выражения $N = F_T v,$
--	---

где F_T – сила тяги; v – скорость самолета при взлете.

Уравнение движения самолета (рис. 3.4):

$$F_T + F_{\text{тр}} + N + mg = ma.$$

В проекциях на оси OX и OY

$$F_T - F_{\text{тр}} = ma,$$

$$N - mg = 0.$$

Следовательно,

$$F_T - \mu mg = ma \text{ (так как } F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \text{)}.$$

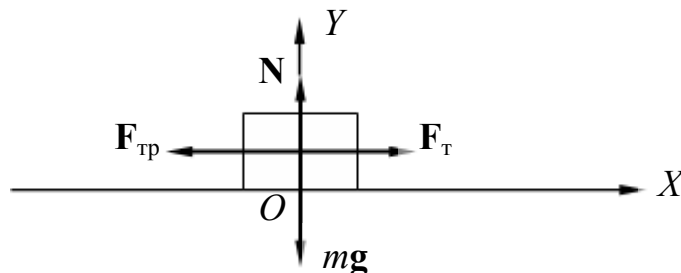


Рис. 3.4

Ускорение самолета можно найти из формулы

$$a = \frac{v^2}{2s}.$$

С учетом этого получим

$$F_T = m \left(\mu g + \frac{v^2}{2s} \right) \text{ и } N = F_T v = mv \left(\mu g + \frac{v^2}{2s} \right).$$

Согласно расчетам $N = 83,1 \text{ кВт}$.

Ответ: $N = 83,1 \text{ кВт}$.

З а д а ч а 5. С башни высотой 25 м горизонтально брошен камень со скоростью 15 м/с. Найти кинетическую и потенциальную энергию камня спустя одну секунду после начала движения. Масса камня равна 0,2 кг.

Дано:

$$H = 25 \text{ м,}$$

$$v_0 = 15 \text{ м/с,}$$

$$t = 1 \text{ с,}$$

$$m = 0,2 \text{ кг}$$

$$W_{\text{к}} = ? \quad W_{\text{п}} = ?$$

Решение. За одну секунду движения камень пролетит расстояние $\Delta H = \frac{gt^2}{2}$ и окажется на высоте $h = H - \Delta H$ относительно поверхности Земли. Потенциальная энергия камня

$$W_{\text{п}} = mgh = mg \left(H - \frac{gt^2}{2} \right).$$

Скорость камня через одну секунду можно найти с помощью формулы

$$v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}.$$

Тогда кинетическая энергия камня составит

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m[v_0^2 + (gt)^2]}{2}.$$

В результате расчетов имеем $W_{\text{п}} = 40 \text{ Дж}$, $W_{\text{к}} = 32,5 \text{ Дж}$.

Ответ: $W_{\text{к}} = 40 \text{ Дж}$, $W_{\text{п}} = 32,5 \text{ Дж}$.

З а д а ч а 6. Определить потенциальную энергию пружины, сжатой на 3 см, если при сжатии ее на 1 см возникает сила упругости, равная 100 Н.

Дано:

$$\Delta l_1 = 3 \text{ см, } \Delta l_2 = 1 \text{ см,}$$

$$F = 100 \text{ Н}$$

$$W_{\text{п}} = ?$$

Решение. Потенциальная энергия деформированной пружины

$$W_{\text{п}} = \frac{k\Delta l^2}{2}.$$

Коэффициент упругости можно найти из условий задачи:

$$F_{\text{упр}} = k\Delta l_2.$$

Отсюда $k = \frac{F_{\text{упр}}}{\Delta l_2}$. Следовательно,

$$W_{\text{п}} = \frac{F_{\text{упр}} \Delta l_1^2}{2 \Delta l_2}$$

В результате расчетов получаем $W_{\text{п}} = 4,5$ Дж.

Ответ: $W_{\text{п}} = 4,5$ Дж.

З а д а ч а 7. Человек массой 60 кг, бегущий со скоростью 8 км/ч, догоняет тележку массой 80 кг, движущуюся со скоростью 2,9 км/ч, и вскакивает на нее. Найти с какой скоростью станет двигаться тележка и с какой скоростью она будет двигаться, если человек бежит ей навстречу.

Дано:	<p style="text-align: center;"><i>Решение.</i> Действие внешних сил на тела системы скомпенсировано, и поэтому можно применить закон сохранения импульса</p> $m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}.$
$m_1 = 60$ кг, $v_1 = 8$ км/ч,	
$m_2 = 80$ кг,	
$v_2 = 2,9$ км/ч	
$v = ?$ $v' = ?$	

Выберем направление оси OX , совпадающее с направлением движения человека. Спроектируем уравнение на ось X для первого случая:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v.$$

Отсюда

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Для второго случая, когда векторы \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 направлены навстречу друг другу,

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v.$$

Отсюда

$$v' = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

В результате расчетов $v = 5,14$ км/ч, $v' = 1,71$ км/ч.

Ответ: $v = 5,14$ км/ч, $v' = 1,71$ км/ч.

Задача 8. Три лодки с одинаковой массой M идут в кильватер (друг за другом) с одинаковой скоростью v в неподвижной воде (рис. 3.5). Из средней лодки со скоростью u относительно нее одновременно в последнюю и первую перебрасывают грузы массой m . Какова будет скорость лодок после переборки грузов?

<p>Дано: M, v, u, m $v_1 = ? \quad v_2 = ? \quad v_3 = ?$</p>	<p><i>Решение.</i> Воспользуемся законом сохранения импульса для каждой лодки в отдельности и груза. Направим ось Ox в сторону движения лодок.</p>
---	---

Рассмотрим систему, состоящую из лодки 3 и груза, перебрасываемого в эту лодку. Скорость всех тел будем определять относительно воды (рис. 3.5).

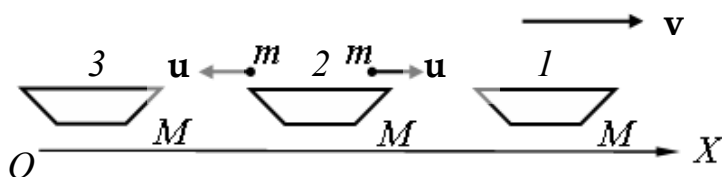


Рис. 3.25

Начальный импульс системы равен

$$p_{\text{нач}} = Mv + m(v + u).$$

В проекции на ось Ox имеем

$$p_{\text{нач}} = Mv + m(v - u).$$

Запишем уравнение закона сохранения импульса:

$$Mv + m(v - u) = (M + m)v_3.$$

Отсюда

$$v_3 = \frac{Mv + m(v - u)}{M + m}.$$

Рассматривая движение лодки 2, можно предположить, что скорость ее не изменится. Это следует из того, что грузы одинаковой массы бросают одновременно в противоположных направлениях. Таким образом, суммарный импульс этих грузов равен нулю.

Покажем это:

$$(M + m + m)v = Mv_2 + m(v + u) + m(v - u).$$

Следовательно,

$$v_2 = v,$$

т. е. скорость лодки не изменилась.

Определим скорость первой лодки v_1 . Проекция начального импульса системы, состоящей из лодки 3 и груза, на ось Ox

$$p_{\text{нач}} = Mv + m(v + u).$$

Закон сохранения импульса записываем таким образом:

$$Mv + m(v + u) = (M + m)v_1.$$

Откуда следует, что

$$v_1 = \frac{Mv + m(v + u)}{M + m}.$$

(Эту задачу можно решить и другим способом в системе отсчета, связанной с водой.)

$$\text{Ответ: } v_1 = \frac{Mv + m(v + u)}{M + m}, \quad v_2 = v, \quad v_3 = \frac{Mv + m(v - u)}{M + m}.$$

З а д а ч а 9. Два тела, скорости которых взаимно перпендикулярны и равны 4 и 3 м/с, а масса каждого 0,4 кг, сталкиваются, образуя тело с массой 0,8 кг. Определить кинетическую энергию тела.

<p>Дано:</p> $v_1 = 4 \text{ м/с}, v_2 = 3 \text{ м/с},$ $m_1 = m_2 = 0,4 \text{ кг}$ <hr/> $W_{\text{к}} = ?$
--

Решение. Для определения кинетической энергии тела необходимо найти его скорость. Воспользуемся законом сохранения импульса:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}.$$

Так как скорости тел до столкновения взаимно перпендикулярны, как видно из рис. 3.6,

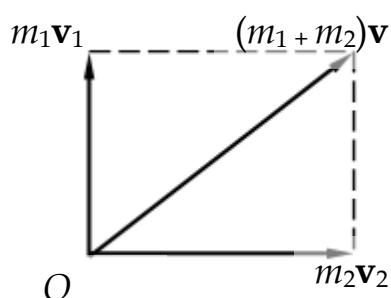


Рис. 3.6

$$(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 = (m_1 + m_2)^2 v^2.$$

Отсюда

$$v^2 = \frac{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2},$$

и, следовательно, кинетическая энергия тела

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = \frac{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

В результате расчетов получаем $W_{\text{к}} = 2,5 \text{ Дж}$.

Ответ: $W_{\text{к}} = 2,5 \text{ Дж}$.

З а д а ч а 10. С какой начальной скоростью необходимо сбросить мяч с высоты 2 м, чтобы он подпрыгнул на высоту 4 м? Считать удар о землю абсолютно упругим.

<p>Дано:</p> $h_1 = 2 \text{ м}, h_2 = 4 \text{ м}$ $v = ?$	<p><i>Решение.</i> Так как удар о землю абсолютно упругий, механическая энергия сохраняется. Поэтому</p>
---	--

$$W_{\text{мех1}} = W_{\text{мех2}},$$

или

$$\frac{mv^2}{2} + mgh_1 = mgh_2.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}.$$

В результате расчетов имеем $v = 6,2 \text{ м/с}$.

Ответ: $v = 6,2 \text{ м/с}$.

З а д а ч а 11. На нити длиной 1 м подвешен шарик. Какую минимальную скорость следует сообщить шарiku в нижней точке, чтобы он начал вращаться в вертикальной плоскости?

<p>Дано:</p> $l = 1 \text{ м}$ $v_{\text{min}} = ?$	<p><i>Решение.</i> В верхней точке (рис. 3.7) движение шарика описывается уравнением</p>
---	--

$$mg + T = m \frac{v^2}{l}.$$

При минимальной его скорости в нижней точке сила натяжения в верхней точке окажется равной нулю, и, следовательно,

$$mg = m \frac{v^2}{l} \text{ или } v^2 = gl.$$

Для нахождения v_{min} используем закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_{\text{min}}^2}{2} = mg \cdot 2l + \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда следует, что

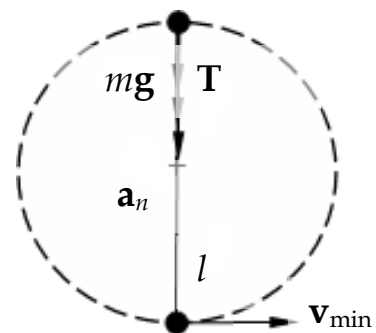


Рис. 3.7

$$v_{\min}^2 = 4gl + gl = 5gl,$$

или

$$v_{\min} = \sqrt{5gl}.$$

В результате получаем $v_{\min} = 7$ м/с.

Ответ: $v_{\min} = 7$ м/с.

З а д а ч а 12. Небольшое тело соскальзывает без трения с полусферы радиусом R . На какой высоте оно оторвется от поверхности полусферы?

<p>Дано: R $h = ?$</p>	<p>Решение. В точке отрыва тело не давит на полусферу, и, следовательно, сила реакции опоры равна нулю (рис. 3.8).</p>
--	--

Уравнение движения тела в проекции на ось OX можно записать как

$$mg \sin \alpha = m \frac{v^2}{R}.$$

Так как тело соскальзывает без трения, его механическая энергия сохраняется:

$$mgR = mgh + \frac{mv^2}{2}.$$

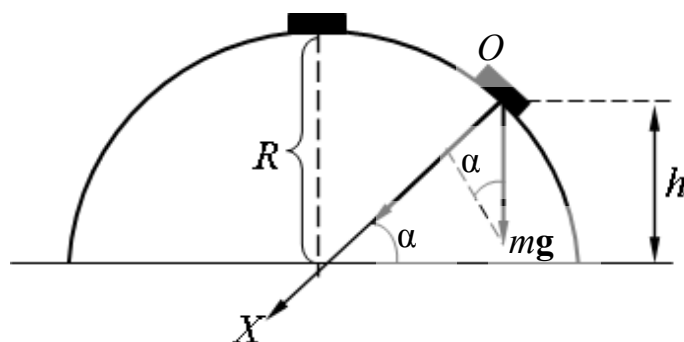


Рис. 3.8

Из первого уравнения

$$v^2 = gR \sin \alpha,$$

где $\sin \alpha = \frac{h}{R}$.

Следовательно,

$$v^2 = gh.$$

Подставив выражение скорости в уравнение закона сохранения энергии, получим

$$R = \frac{3}{2}h \text{ или } h = \frac{2}{3}R.$$

Ответ: $h = \frac{2}{3}R.$

З а д а ч а 13. Пружина игрушечного пистолета жесткостью 800 Н/м сжата на 5 см. Какую скорость приобретет пуля массой 20 г при выстреле в горизонтальном направлении?

Дано:
 $k = 800 \text{ Н/м},$
 $\Delta l = 5 \text{ см},$
 $m = 20 \text{ г}$

 $v = ?$

Решение. При выстреле потенциальная энергия сжатой пружины переходит в кинетическую энергию пули, и, следовательно,

$$\frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда для скорости пули в момент выстрела получаем

$$v = \sqrt{\frac{k\Delta l^2}{m}}.$$

В результате расчетов имеем $v = 10 \text{ м/с}.$

Ответ: $v = 10 \text{ м/с}.$

З а д а ч а 14. Два шара подвешены на параллельных нитях одинаковой длины так, что соприкасаются (рис. 3.9). Масса первого шара 0,2 кг, масса второго 0,1 кг. Первый шар отклоняют так, что его центр тяжести поднимается на высоту 4,5 см, и затем отпускают. На какую высоту поднимутся шары после неупругого соударения?

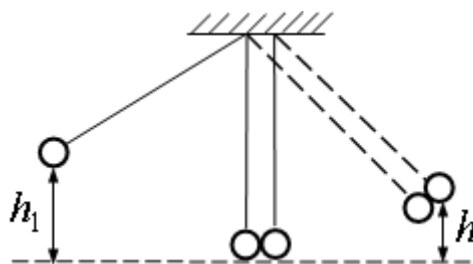


Рис. 3.9

Дано:
 $m_1 = 0,2 \text{ кг},$
 $m_2 = 0,1 \text{ кг},$
 $h_1 = 4,5 \text{ см}$

 $h = ?$

Решение. Скорость первого шара перед соударением можно найти из закона сохранения механической энергии:

$$m_1gh_1 = \frac{m_1v_1^2}{2}.$$

Отсюда

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}.$$

Так как соударение было неупругим, часть механической энергии переходит во внутреннюю энергию шаров, а скорость, с которой они начинают двигаться, найдем из закона сохранения импульса

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)v.$$

Отсюда

$$v = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

При подъеме шаров их кинетическая энергия переходит в потенциальную:

$$\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = (m_1 + m_2)gh.$$

Отсюда

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{m_1^2v_1^2}{2g(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}h_1.$$

На основании расчетов имеем $h = 2$ см.

Ответ: $h = 2$ см.