Виртуальный курс физики

МЕХАНИКА

Кинематика. Задачи с решениями

МЕХАНИКА

Кинематика

Задачи с решениями

З а д а ч а 1. Из Выборга в Санкт-Петербург с интервалом 10 мин вышли два грузовых поезда со скоростью 30 км/ч. С какой скоростью двигался пассажирский поезд, идущий из Санкт-Петербурга в Выборг, если встреча с этими грузовыми поездами произошла с интервалом 4 мин?

Дано:
v_1=30 км/ч,
t_1 = 10 мин = 1/6 ч,
t_2 = 4 мин = 1/15 ч
v_2 = ?

Решение. Рассмотрим движение грузовых поездов в системе отсчета, связанной с наблюдателем, находящимся в вагоне пассажирского поезда (рис.1.1). В этой системе отсчета пассажирский поезд неподвижен, а движение встречных грузовых поездов сложное: со скоростью $\mathbf{v}_1$ он движется относительно Земли и со скоростью $\mathbf{v}'_2 = -\mathbf{v}_2$ – одновременно с Землей относительно пассажирского поезда.

Скорость результирующего движения выразится вектором $\mathbf{v}$, равным $\mathbf{v} = \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_1$, или в скалярной форме, $v = v'_2 + v_1 = v_1 + v_2$.

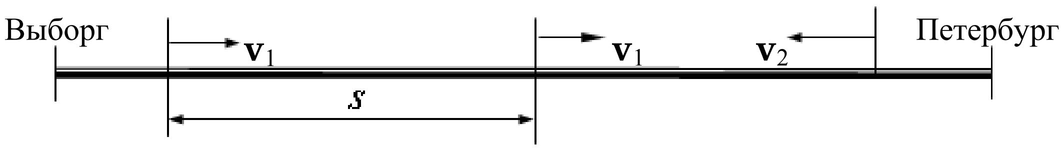

Рис. 1.1

Вместе с тем

$$v = \frac{s}{t_2},$$

где $s = v_1 t_1$ – расстояние между грузовыми поездами.

Таким образом,

$$v_1 + v_2 = \frac{v_1 t_1}{t_2},$$

откуда следует, что

$$v_2 = \frac{v_1 t_1 - v_1 t_2}{t_2}.$$

В результате подстановки данных и расчета получаем $v_2 = 45$ км/ч.

Ответ: v_2 = 45 км/ч.

З а д а ч а 2. Из деревни, расположенной на берегу реки, необходимо переправиться по кратчайшему пути в поселок, находящийся на противоположном берегу в 2 км выше по течению. Ширина реки 1 км, максимальная скорость лодки в неподвижной воде 5 км/ч, скорость течения реки 2 км/ч. Можно ли преодолеть расстояние от деревни до поселка на лодке за 0,5 ч?

Дано:
$h = 1$ км,
$l = 2$ км,
$v = 5$ км/ч,
$v_0 = 2$ км/ч,
$t = 0,5$ ч

$t' = ?$

Решение. Направим ось *OX* системы координат с началом в пункте отплытия лодки вдоль берега против течения, а ось *OY* – перпендикулярно к берегу (рис. 1.2). Предположим, что скорость лодки v составляет угол α с осью *OX*. Тогда закон движения лодки в проекциях на оси координат можно записать в виде равенств

$$x = (v\cos\alpha - v_0)t',$$
$$y = (v\sin\alpha)t'.$$

Лодка попадет на другой берег к поселку при условии, что $x = l$, а $y = h$. С учетом этих равенств движение лодки можно представить в виде уравнений

$$l = (v\cos\alpha - v_0)t',$$
$$h = (v\sin\alpha)t'.$$

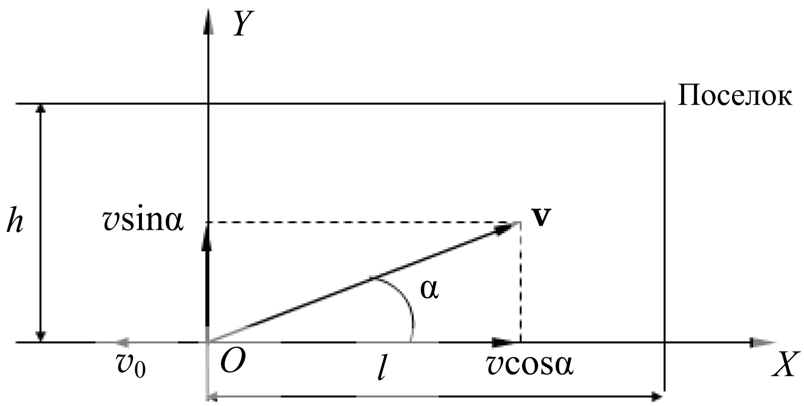

Рис. 1.2

Исключим из этих двух уравнений угол α:

$$\sin\alpha = \frac{h}{vt'},$$

$$\cos\alpha = \left(\frac{l}{t'} + v_0\right)\frac{1}{v}.$$

Возведем каждое уравнение в квадрат и, сложив почленно, получим

$$(v^2 - v_0^2)t'^2 - 2v_0 t' l - (h^2 + l^2) = 0.$$

Подставив численные значения из условия задачи, найдем $t' = 0{,}7$ ч.

По условию задачи $t = 0{,}5$ ч. Так как $t' > t$, преодолеть расстояние от деревни до поселка за 0,5 ч невозможно.

Ответ: $t' = 0{,}7$ ч.

З а д а ч а 3. Поезд прошел первую половину пути со скоростью 72км/ч. Затем, первую половину оставшегося времени он двигался со скоростью 30 км/ч, а вторую половину времени со скоростью 36 км/ч. Найти среднюю скорость за все время движения.

Дано:
$v_1 = 72$ км/ч,
$v_2 = 30$ км/ч,
$v_3 = 36$ км/ч
$v_{ср} = ?$

Решение. Средняя скорость $v_{ср}$ численно равна отношению всего пути, пройденного поездом, ко времени движения:

$$v_{ср} = \frac{s}{t}.$$

Разделим весь путь, который прошел поезд, на три участка: s_1, s_2 и s_3. Каждому из этих участков соответствуют скорости $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ и время движения t_1, t_2, t_3 (рис. 1.3).

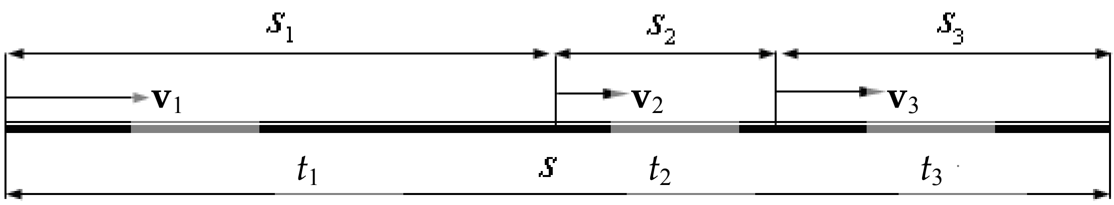

Рис. 1.3

Уравнения движения для каждого участка представим в виде

$$s_1 = v_1 t_1, \quad s_2 = v_2 t_2, \quad s_3 = v_3 t_3.$$

Весь путь поезда $s = s_1 + s_2 + s_3$. Так как $s_2 + s_3 = s_1$, можно записать

$$s = 2s_1.$$

Полное время движения поезда $t = t_1 + t_2 + t_3$. По условию задачи $t_2 = t_3$, следовательно, $t = t_1 + 2t_2$.

Из соотношения

$$s_2 + s_3 = v_2 t_2 + v_3 t_3 = (v_2 + v_3) t_2$$

находим

$$t_2 = \frac{s_2 + s_3}{v_2 + v_3} = \frac{s_1}{v_2 + v_3}.$$

Таким образом,

$$t = t_1 + 2t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{2s_1}{v_2 + v_3}.$$

Подставим полученные выражения пройденного пути и времени в формулу скорости $v_{\text{ср}}$:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2s_1}{\dfrac{s_1}{v_1} + \dfrac{2s_1}{v_2 + v_3}} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3}.$$

В результате подстановки данных и расчета имеем

$$v_{\text{ср}} = 45{,}3 \text{ км/ч}.$$

Ответ: $v_{\text{ср}} = 45{,}3$ км/ч.

З а д а ч а 4. Пассажир первого вагона поезда находился около последнего вагона, когда поезд тронулся с ускорением 0,1 м/с^2. Для того чтобы догнать вагон, пассажир побежал со скоростью 5 м/с. За какое время он догонит свой вагон, если расстояние от последнего вагона до первого 80 м?

Дано:
$a = 0{,}1$ м/с^2,
$v = 5$ м/с,
$l = 80$ м
$t = ?$

Решение. Проведем ось OX в направлении движения поезда, а начало оси выберем в точке O (рис. 1.4), из которой пассажир начинает движение. Тогда уравнения движения пассажира и поезда будут иметь вид

$$x_1 = vt, \quad x_2 = x_0 + \frac{at^2}{2},$$

где t – время, за которое пассажир догонит свой вагон.

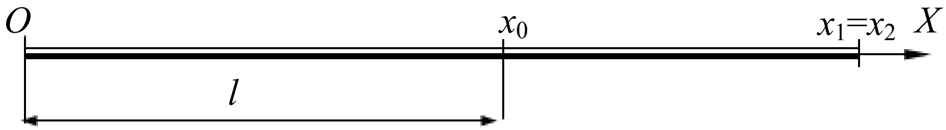

Рис. 1.4

Так как $x_1=x_2$, то решая совместно оба уравнения, имеем

$$vt = x_0 + \frac{at^2}{2},$$

или

$$\frac{at^2}{2} - vt + x_0 = 0.$$

Подставляя в уравнение численные значения, получаем

$$t^2 - 100t + 1600 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим два корня:

$$t_1 = 20 \text{ с}, \quad t_2 = 80 \text{ с}.$$

Первый корень квадратного уравнения соответствует моменту времени, в который пассажир догонит первый вагон. Если бы пассажир продолжал бежать, то обогнал бы его. Однако позже поезд, набрав скорость, догнал бы пассажира. Второй корень квадратного уравнения и соответствует этому моменту времени. Поэтому в качестве ответа следует выбрать первый корень квадратного уравнения, равный 20 с.

Ответ: t = 20 с.

З а д а ч а 5. Расстояние между двумя станциями 27 км поезд проходит за 30 мин. Определить среднюю и наибольшую скорость поезда, ускорение при разгоне и торможении, если, отходя от первой станции, он затратил 3 мин на разгон и, подходя ко второй станции, потерял 1 мин на торможение. Остальное время поезд двигался с постоянной скоростью.

Дано:

s = 27 км = $27 \cdot 10^3$ м,

t = 30 мин = $18 \cdot 10^2$ с,

t_1 = 3 мин = 180 с,

t_2 = 1 мин = 60 с

$v_{ср}$ = ? a_1 = ?

v = ? a_2 = ?

Решение. Направим ось OX по движению поезда, а начало оси выберем в точке O, из которой поезд начинает движение (рис. 1.5). Рассмотрим движение поезда на трех участках. На первом участке путь, пройденный за время t_1, можно определить по формуле

$$s_1 = v_{ср1} t_1,$$

где $v_{\text{ср}1}$ – средняя скорость поезда на участке разгона; t_1 – время разгона поезда до наибольшей скорости. С этой скоростью поезд двигался на втором участке равномерно до начала торможения.

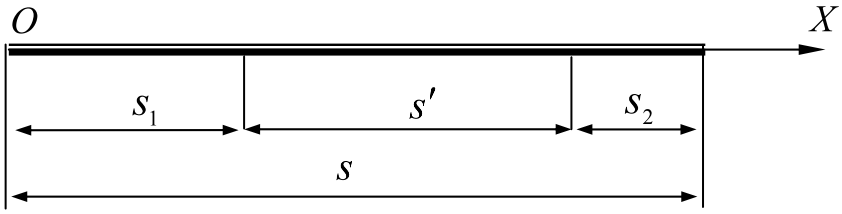

Рис. 1.5

Путь, пройденный на втором участке с постоянной скоростью, равен

$$s' = vt_3,$$

где $t_3 = t - t_1 - t_2$ – время, в течение которого поезд двигался равномерно.

На третьем участке путь, пройденный поездом за время торможения, равен

$$s_2 = v_{\text{ср}2} t_2,$$

где $v_{\text{ср}2}$ – средняя скорость поезда на участке торможения; t_2 – время торможения.

Из условия задачи имеем

$$s = s_1 + s' + s_2$$

или, заменяя s_1, s' и s_2 полученными выше выражениями, находим

$$s = v_{\text{ср}1} t_1 + vt_3 + v_{\text{ср}2} t_2.$$

С учетом того, что для равнопеременного движения на первом и третьем участках средняя скорость может быть выражена как среднее арифметическое начальной и конечной скоростей, уравнение движения поезда принимает вид

$$s = \frac{v}{2} t_1 + v(t - t_1 - t_2) + \frac{v}{2} t_2 = v\left(t - \frac{t_1}{2} - \frac{t_2}{2}\right),$$

откуда следует, что

$$v = \frac{s}{t - \frac{t_1}{2} - \frac{t_2}{2}}.$$

Ускорение движения поезда при разгоне $a_1 = \frac{v}{t_1}$.

Ускорение замедления поезда при торможении определяется по формуле

$$v_2 = v + a_2 t_2,$$

где $v_2 = 0$, т. е. $v = -a_2 t_2$, откуда

$$a_2 = -\frac{v}{t_2}.$$

Средняя скорость движения поезда на всем протяжении пути

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t}.$$

Расчеты показывают, что $v_{\text{ср}} = 15$ м/с, $v = 16$ м/с, $a_1 = 0{,}1$ м/с^2, $a_2 = -0{,}3$ м/с^2.

Ответ: $v_{\text{ср}} = 15$ м/с, $v = 16$ м/с, $a_1 = 0{,}1$ м/с^2, $a_2 = -0{,}3$ м/с^2.

З а д а ч а 6. Тело начало равнопеременное движение вдоль прямой с запада на восток с начальной скоростью 20 м/с и ускорением 0,5 м/с^2, направленным в противоположную вектору скорости сторону. Найти пройденный телом путь s_1 и s_2 и перемещение через 0,5 и 2 мин после начала движения.

Дано:
$v_0 = 20$ м/с,
$a = -0{,}5$ м/с^2,
$t_1 = 0{,}5$ мин = 30 с,
$t_2 = 2$ мин = 120 с
$s_1 = ?$ $s_2 = ?$
$x_1 = ?$ $x_2 = ?$

Решение. Направим ось OX вдоль вектора первоначальной скорости, а начало оси выберем в точке O (рис. 1.6), из которой тело начало движение. Тогда для координаты x_1 проекции вектора перемещения за время t_1 можно воспользоваться уравнением для равнопеременного движения

$$x_1 = v_0 t_1 + \frac{a t_1^2}{2}.$$

Подставляя в уравнение численные значения, получаем $x_1 = 375$ м.

Аналогично для координаты x_2 имеем

$$x_2 = v_0 t_2 + \frac{a t_2^2}{2}.$$

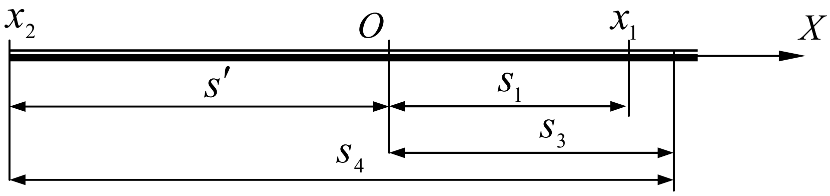

Рис. 1.6

В результате вычислений имеем $x_2 = -1200$ м.

Таким образом, через 0,5 мин от начала движения тело будет находиться на расстоянии 375 м к востоку от начального пункта, а через 2 мин – на расстоянии 1200 м к западу от него.

Пройденный путь s_2 в общем случае представляет собой сумму двух расстояний:

$$s_2 = s_3 + s_4,$$

где s_3 – расстояние от начала движения до точки, в которой скорость равна нулю;

s_4 – расстояние, пройденное телом в противоположном направлении.

Для нахождения этих расстояний необходимо знать время, через которое скорость станет равной нулю. Зависимость скорости тела от времени определяется формулой

$$v = v_0 + at.$$

Подставив в эту формулу значение скорости в интересующий нас момент времени, получим

$$0 = v_0 + at.$$

Отсюда

$$t = -\frac{v_0}{a}.$$

Тогда путь, пройденный за время t, равен

$$s_3 = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Подставляя в выражения численные значения, находим $t = 40$ с, $s_3 =$ 400 м.

Как видно из рисунка, тот же путь тело проходит, двигаясь и в обратном направлении. Таким образом, путь, пройденный телом, можно представить в виде

$$s_2 = 2s_3 + s', \text{ где } s' = |x_2|.$$

Подставляя в выражение численные значения, находим $s_2 = 2000$ м.

Ответ: s_1 = 375 м, s_2 = 2000 м, x_1 = 375 м, x_2 = –1200 м.

З а д а ч а 7. Свободно падающее тело прошло последние 10 м за 0,25 с. Определить высоту падения H и скорость в момент падения на Землю v.

Дано:	
h_2 = 10 м,	*Решение.* Направим ось OY вертикально вниз, а начало координат O расположим на высоте H от поверхности Земли (рис. 1.7). Тогда согласно условию задачи можно записать
t_2 = 0,25 с	
H = ? v = ?	

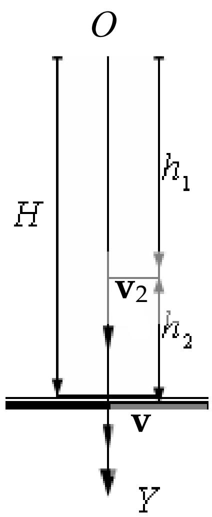

Рис. 1.7

$$H = h_1 + h_2,$$

где h_1 – путь, пройденный телом от начала падения до высоты 10 м; h_2 – последние 10 м. Высоту h_2 тело проходило равноускоренно с начальной скоростью v_2.

Следовательно,

$$h_2 = v_2 t_2 + \frac{g t_2^2}{2}.$$

Отсюда

$$v_2 = \frac{h_2}{t_2} - \frac{g t_2^2}{2}.$$

Подставляя в это выражение численные значения, находим

$$v_2 = 39,7 \text{ м/с}.$$

Скорость v_2 является конечной скоростью тела, падающего с высоты h_1. Следовательно,

$$v_2 = \sqrt{2gh_1},$$

откуда можно получить

$$h_1 = \frac{v_2^2}{2g}.$$

Подставляя данные из условия задачи, находим, что $h_1 = 80{,}4$ м. Высота падения тела

$$H = h_1 + h_2.$$

Скорость в момент падения тела на Землю равна

$$v = v_2 + gt_2.$$

В результате расчетов получаем

$$H = 90{,}4 \text{ м}, \ v = 42{,}2 \text{ м/с}.$$

Ответ: $H = 90{,}4$ м, $v = 42{,}2$ м/с.

З а д а ч а 8. С конца желоба, находящегося на высоте 3 м от пола, скатывается шарик со скоростью 7 м/с под углом 30° к горизонту. На каком расстоянии l от конца желоба шарик упадет на пол? Сопротивлением воздуха следует пренебречь.

Дано:
$h = 3$ м,
$v_0 = 7$ м/с, $\alpha = 30°$
$l = ?$

Решение. В системе координат XOY составляющие скорости шарика по осям координат равны (рис. 1.8)

$$v_X = v_0 \cos\alpha,$$
$$v_Y = v_0 \sin\alpha.$$

Запишем уравнения движения в виде

$$x = v_X\, t = v_0 \cos\alpha t,$$
$$y = v_{0Y}\, t + \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin\alpha t + \frac{gt^2}{2}.$$

В момент t_0 падения шарика на земную поверхность $x = s$ и $y = h$, и уравнения движения принимают вид

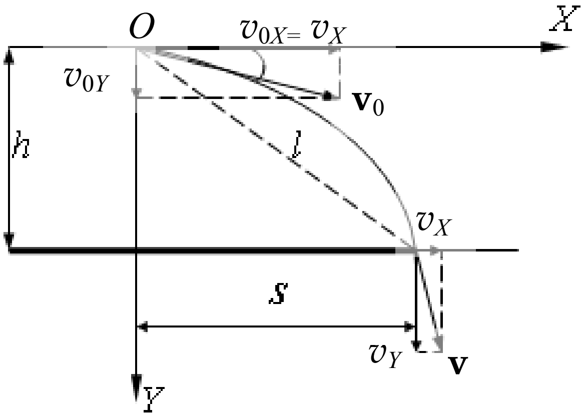

Рис.1.8

$$s = v_0 \cos\alpha t_0,$$
$$h = v_0 \sin\alpha t + \frac{gt_0^2}{2}.$$

Из первого уравнения находим

$$t_0 = \frac{s}{v_0 \cos\alpha}.$$

Подставим полученное выражение для t_0 во второе уравнение:

$$h = s\operatorname{tg}\alpha + \frac{gs^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

или

$$\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}s^2 + s\operatorname{tg}\alpha - h = 0.$$

В результате вычислений имеем s = 3,05 м. Искомое расстояние l, как видно из рисунка, можно найти по формуле

$$l = \sqrt{s^2 + h^2}.$$

Подставляя численные значения, получаем l = 4,3 м.

Ответ: l = 4,3 м.

З а д а ч а 9. На веревке длиной 1,2 м вращается тело в вертикальной плоскости так, что она совершает 120 оборотов за 2 мин. На какую высоту h поднимется тело, если веревку выпустить в момент, когда она располагается горизонтально? (Ось вращения находится на высоте 1,5 м от поверхности Земли.)

Дано:
R = 1,2 м, N = 120,
t = 2 мин = 120 с,
h_0 = 1,5 м
h =?

Решение. В системе координат XOY, изображенной на рис. 1.9, скорость тела в момент отпускания веревки, направлена по касательной к траектории движения в точке A вертикально вверх. Так как начальная вертикальная координата $y_0 = h_0$, уравнения движения вдоль оси OY имеют вид

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

$$v = v_{0Y} - gt.$$

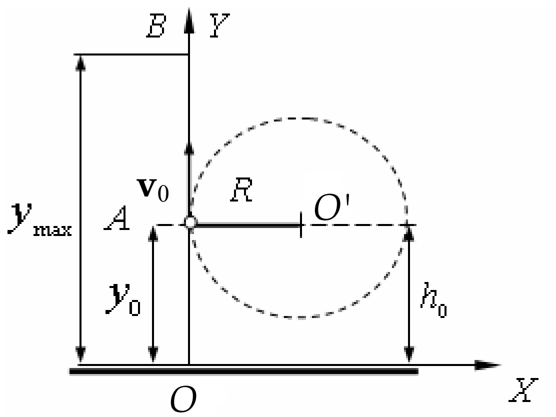

Рис. 1.9

В наивысшей точке подъема B скорость тела равна нулю:

$$0 = v_{0Y} - gt_{max}.$$

Следовательно, время подъема тела на высоту h

$$t_{max} = \frac{v_{0Y}}{g}.$$

Координата тела в наивысшей точке подъема B

$$y_{\max} = y_0 + v_0 t_{\max} - \frac{g t_{\max}^2}{2} = y_0 + \frac{v_{0Y}^2}{2g}.$$

Скорость тела в момент отпускания веревки равна линейной скорости вращения тела по окружности радиусом R с частотой $\nu = \dfrac{N}{t}$:

$$v_{0Y} = 2\pi R\nu = 2\pi \frac{N}{t} R.$$

Подставляя выражение для v_{0Y} в формулу для координаты тела в точке B, имеем

$$y_{\max} = y_0 + \frac{v_{0Y}^2}{2g} = y_0 + \frac{\left(2\pi \dfrac{N}{t} R\right)^2}{2g} = y_0 + \frac{2\pi^2 N^2 R^2}{g t^2}.$$

Расчеты приводят к следующему результату: $h = y_{\max} = 4{,}4$ м.

Ответ: $h = 4{,}4$ м.

З а д а ч а 10. Тонкостенный цилиндр радиусом 0,5 м вращается вокруг своей оси с угловой скоростью 4 рад/с. В цилиндр попадает пуля, летящая по прямой, проходящей через ось перпендикулярно к ней. Отверстия от пули оказались лежащими на прямой, отстоящей от оси вращения на расстояние 0,5 см. Найти скорость пули v.

Дано:
$R = 0{,}5$ м,
$\omega = 4$ рад/с,
$l = 0{,}5$ см $= 5\cdot10^{-3}$ м

$v = ?$

Решение. Рассмотрим тонкостенный цилиндр радиусом R, вращающийся вокруг оси O с угловой скоростью ω (рис. 1.10). За промежуток времени t, в который пуля прошла внутри цилиндра, он повернулся на угол φ. Таким образом, можно записать следующие выражения:

$$t = \frac{2R}{v}, \quad t = \frac{\varphi}{\omega}.$$

Приравнивая правые части выражений, получаем

$$v = \frac{2R\omega}{\varphi}.$$

Из рисунка видно, что угол φ – внешний угол треугольника *OCB*, поэтому $\varphi = 2\alpha$.

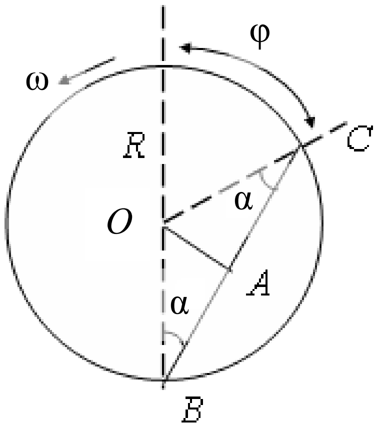

Рис. 1.10

Из треугольника *OAB* следует

$$\sin\alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{5\cdot 10^{-3}}{0,5} = 0,01.$$

При малых углах $\sin\alpha$ можно заменить самим углом, выраженным в радианах, т. е. $\alpha = 0,01$.

Подставляя найденное значение угла $\varphi = 2\alpha = 0,02$ в выражение для скорости полета пули, полученное ранее, находим

$$v = \frac{R\omega}{\alpha}.$$

Расчеты дают следующий результат: $v = 200$ м/с.

Ответ: $v = 200$ м/с.