Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ”

Кафедра “Инженерная геодезия”

УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

Учебное пособие

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
ПГУПС
2014

УДК 528.48
И62

Уравнивание геодезических измерений параметрическим способом. Учебное пособие / М.Я. Брынь, А.В. Астапович, Д.А. Афонин, – СПб.: Петербургский государственный университет путей сообщения, 2014. - с.

Изложены теоретические основы уравнивания и оценки точности геодезических измерений параметрическим способом, приведены примеры уравнительных вычислений.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 120700 «Землеустройств и кадастры».

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Параметрический способ уравнивания находит самое широкое применение в геодезической практике при уравнивании геодезических построений. Это обусловлено важными достоинствами параметрического способа: возможностью довольно легко автоматизировать процедуру составления исходных уравнений поправок и выполнять по несложным алгоритмам полную оценку точности измеренных величин и их функций.

В пособии изложены теоретические основы параметрического способа уравнивания, сформулирована последовательность уравнительных вычислений параметрическим способом, рассмотрены вопросы оценки точности по материалам уравнивания, приведены примеры уравнительных вычислений геодезических построений.

Изложение материала построено на алгебре матриц. Это позволяет избежать громоздких формул обычной алгебры, допускает строгие и лаконичные доказательства, приводит к алгоритмам, удобно реализуемым на компьютерах. В связи с эти в пособии даны некоторые рекомендации по эффективному использованию компьютеров в уравнительных вычислениях.

Запись основных матричных формул уравнивания и оценки точности сопровождается их обычной записью. Это важно для впервые изучающего уравнительные вычисления, так как значительный объем вычислений ему придется проделать вручную.

1. ОСНОВЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СПОСОБА УРАВНИВАНИЯ

1.1. Постановка задачи уравнивания параметрическим способом

Решение задачи уравнивания параметрическим способом основано на представлении всех измеренных величин в виде функций некоторых выбранных параметров – необходимых величин, отражающих изучаемые характеристики (свойства) физического объекта или явления.

Для уяснения сущности параметров обратимся к плоскому треугольнику с измеренными элементами: стороной c, углами A, B, C. (рисунок 1.1). Число измеренных элементов $n = 4$.

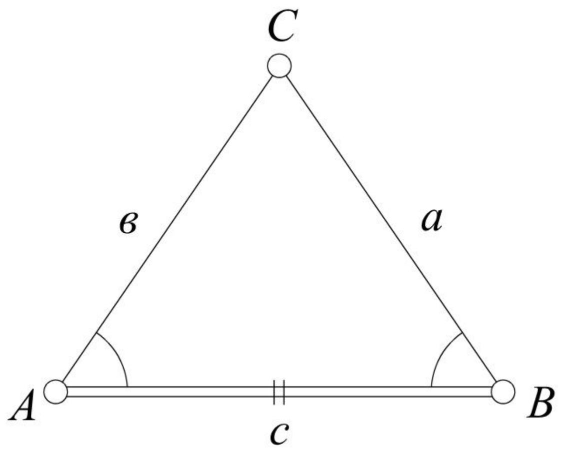

Рисунок 1.1 – Треугольник с измеренной стороной и углами

Для решения плоского треугольника (т.е. однозначного определения его сторон и углов) необходимо измерить 3 элемента, один из которых должен быть линейным.

Такие независимые между собой величины, задав которые можно однозначно определить значения всех искомых величин, называются **параметрами**. Часто параметры называют необходимыми неизвестными.

Таким образом, число необходимых измерений $k = 3$. Число избыточно измеренных величин $r = n - k = 4 - 3 = 1$. Возникает задача уравнивания. При этом нетрудно заметить, что количество параметров равно количеству необходимых измерений.

Обозначив параметры буквой T, выберем в качестве параметров непосредственно измеренные величины

$$T_1 = c;\ T_2 = A;\ T_3 = B.$$

Тогда все измеренные элементы треугольника в виде функций этих параметров выразятся

$$c = T_1;\ A = T_2;\ B = T_3;\ C = 180^\circ - T_2 - T_3.$$

Если в качестве параметров выбрать функции измеренных величин, например, $T_1 = c$; $T_2 = a$; $T_3 = b$ (стороны a и b не являются измеренными величинами), тогда все измеренные элементы треугольника в виде функции выбранных параметров выразятся

$$c = T_1;\ \ A = \arccos\left(\frac{T_1^2 + T_3^2 - T_2^2}{2T_1T_3}\right);$$

$$B = \arccos\left(\frac{T_1^2 + T_2^2 - T_3^2}{2T_1T_2}\right);\ C = \arccos\left(\frac{T_2^2 + T_3^2 - T_1^2}{2T_2T_3}\right).$$

Последние три соотношения следуют из известной теоремы косинусов.

Сформулируем **требования** к выбору необходимых параметров:

- количество параметров должно быть равно количеству необходимых измерений;

- параметры должны быть функционально независимыми, т.е. ни один из них не должен быть функцией других (недопустимо в качестве параметров в рассматриваемом нами примере выбрать углы $T_1 = A$; $T_2 = B$; $T_3 = C$, ибо они связаны соотношением $T_1 + T_2 + T_3 - 180^\circ = 0$);

- в качестве параметров могут быть выбраны как измеренные величины, так и их функции;

- функции, выражающие измеренные величины через выбранные параметры, должны быть по возможности линейными.

Рассмотрим общую постановку задачи уравнивания параметрическим способом. Пусть для изучения некоторого объекта измерены величины $X_1, X_2, \cdots, X_n$, из них r величин – избыточные, т.е. выполненные сверх необходимых для изучения свойств данного объекта. Результаты измерений этих величин $x_1, x_2, \cdots, x_n$ образуют вектор измеренных значений

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Положим, что результаты измерений следуют нормальному закону распределения, измерения не отягощены систематическими погрешностями и выполнены независимо.

Веса результатов измерений $p_1, p_2, \cdots, p_n$ образуют диагональную весовую матрицу

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}.$$

Стоит задача определения вектора уравненных значений измеренных величин

$$X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

Для решения поставленной задачи выберем параметры $T_1, T_2, \cdots, T_k$ и представим измеренные величины в виде функции выбранных параметров

$$X_1 = \varphi_1(T_1, T_2, \cdots, T_k);$$
$$X_2 = \varphi_2(T_1, T_2, \cdots, T_k);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_n = \varphi_n(T_1, T_2, \cdots, T_k),$$

или

$$X_i = \varphi_i(T_1, T_2, \cdots, T_k), (i = 1, 2, \cdots, n). \quad (1.1)$$

Равенство (1.1) называются **параметрическими уравнениями связи** – уравнениями, выражающими измеренные величины в виде функций независимых параметров.

Число параметрических уравнений связи равно числу измерений.

Обозначим уравненные значения измеренных величин через $x'_i = x_i + v_i$, где v_i - поправки в результаты измерений x_i, а уравненные значения выбранных параметров обозначим буквой t_j, $(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, k)$.

Тогда уравнения (1.1) можно представить в следующем виде

$$x_i + v_i = \varphi_i(t_1, t_2, \cdots, t_k), (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Откуда

$$v_i = \varphi_i(t_1, t_2, \cdots, t_k) - x_i, (i = 1, 2, \cdots, n). \quad (1.2)$$

Данная система уравнений состоит из n уравнений и имеет $n + k$ неизвестных (неизвестными выступают поправки v_i, число которых равно n, и уравненные параметры t_j, число которых равно k). Так как система (1.2) сформирована по независимым параметрам и число уравнений меньше числа неизвестных, то данная система является неопределенной и допускает множество решений. Для разрешения имеющейся неопределенности необходимо ввести дополнительное условие. Из множества возможных решений системы (1.2) выберем такое, при котором $[pv^2] = \min$, т.е. на искомые поправки наложим требование принципа наименьших квадратов.

С учетом (1.2) $\left[pv^2\right]$ можно представить

$$\sum p_i \left\{ \varphi_i(t_1, t_2, \cdots, t_k) - x_i \right\}^2 = \min, \tag{1.3}$$

неизвестными в которой выступают t_j, т.е. (1.3) можно записать в виде некоторой функции

$$G(t_1, t_2, \cdots, t_k) = \min. \tag{1.4}$$

Для исследования функции (1.4.) на экстремум необходимо взять частные производные по переменным t_j и приравнять их к нулю, в результате чего получим k уравнений вида

$$\frac{\partial G}{\partial t_j} = 0, \, (j = 1, 2, \cdots, k). \tag{1.5}$$

Объединяя равенства (1.2) и (1.5) получим систему уравнений, состоящую из $n+k$ уравнений, содержащую $n+k$ неизвестных. Таким образом, задача уравнивания становится определенной, имеющей единственное решение.

Однако в общем случае, система уравнений (1.2) имеет нелинейный вид и ее решение оказывается практически невозможным, поэтому функции $\varphi_i(t_1, t_2, \cdots, t_k)$, входящие в систему (1.2) следует привести к линейному виду путем разложения в ряд Тейлора, в котором можно пренебречь членами второго и высшего порядков.

Таким образом, общий подход к уравниванию результатов измерений параметрическим способом состоит в следующем: выбор параметров и составление параметрических уравнений связи, их линеаризация, решение полученных уравнений на основе принципа наименьших квадратов.

1.2. Параметрические уравнения поправок

Рассмотрим вопрос линеаризации параметрических уравнений связи, для чего представим уравненные значения параметров в виде

$$t_j = t_j^0 + \tau_j, \, (j = 1, 2, \cdots, k), \tag{1.6}$$

где t_j^0 - приближенные значения параметров; τ_j - поправки к приближенным значениям параметров.

Равенства (1.6) могут быть записаны в матричном виде следующим образом

$$t = t^0 + \tau,$$

где

$t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{bmatrix}$ - вектор уравненных значений параметров размера kx1,

$t^0 = \begin{bmatrix} t_1^0 \\ t_2^0 \\ \vdots \\ t_k^0 \end{bmatrix}$ - вектор приближенных значений параметров размера kx1,

$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_k \end{bmatrix}$ - вектор поправок к приближенным значениям параметров размера kx1.

Подставим выражение (1.6) в равенство (1.2), получим

$$v_i = \varphi_i(t_1^0 + \tau_1, t_2^0 + \tau_2, \cdots, t_k^0 + \tau_k) - x_i, (i = 1, 2, \cdots, n). \quad (1.7)$$

Разложим функцию φ_i в ряд Тейлора. Положим при этом, что приближенные значения параметров $t_1^0, t_2^0, \cdots, t_k^0$ определены с такой точностью, что нелинейными членами разложения можно пренебречь. Получим

$$v_i = \varphi_i(t_1^0, t_2^0, \cdots, t_k^0) + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_1}\right)_0 \tau_1 + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_2}\right)_0 \tau_2 + \cdots + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_k}\right)_0 \tau_k - x_i, \quad (1.8)$$

$(i = 1, 2, \cdots, n)$.

Введем обозначения

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_1}\right)_0 = b_{i1}; \quad \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_2}\right)_0 = b_{i2};...; \quad \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_k}\right)_0 = b_{ik};$$

$$\varphi_i(t_1^0, t_2^0, \cdots, t_k^0) - x_i = l_i, (i = 1, 2, \cdots, n). \quad (1.9)$$

Последнее выражение в матричной форме может быть записано

$$\varphi(t_0) - X = L. \quad (1.10)$$

Индекс «0» в $\left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right)_0$ означает, что значения частных производных являются числами, вычисленными по приближенным значениям параметров.

Тогда система равенств (1.8) в развернутом виде может быть записана

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = b_{11}\tau_1 + b_{12}\tau_2 + \cdots + b_{1k}\tau_k + l_1; \\ v_2 = b_{21}\tau_1 + b_{22}\tau_2 + \cdots + b_{2k}\tau_k + l_1; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n = b_{n1}\tau_1 + b_{n2}\tau_2 + \cdots + b_{nk}\tau_k + l_n. \end{array}\right\} \quad (1.11)$$

Уравнения (1.11) имеют линейный вид и называются **параметрическими уравнениями поправок** - это уравнения, получаемые в результате линеаризации параметрических уравнений связи и выражающие связь между поправками к результатам измерений и поправками к приближенным значениям параметров.

Часто уравнения (1.11) называют просто уравнениями поправок. Количество таких уравнений равно числу измерений.

Коэффициенты b_{ij} при неизвестных τ_j называются коэффициентами параметрических уравнений поправок, а l_i - свободными членами параметрических уравнений поправок. Заметим, **что свободный член вычисляется как разность между измеренной величиной, вычисленной по приближенным значениям параметров, и результатом измерения.**

Система параметрических уравнений поправок (1.11) в матричной записи примет вид

$$V = B\tau + L, \quad (1.12)$$

где

$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ - вектор поправок к результатам измерений размера kx1;

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}$$ - матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок размера nхk;

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_k \end{bmatrix}$$ - вектор поправок к приближенным значениям параметров размера kх1;

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$ - вектор свободных членов параметрических уравнений поправок размера nх1.

Следует заметить, что иногда в учебной литературе коэффициенты параметрических уравнений поправок обозначают так

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_1}\right)_0 = a_i, \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_2}\right)_0 = b_i, \cdots, \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_k}\right)_0 = u_i, (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Соответственно уравнения поправок записывают следующим образом

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1\tau_1 + b_1\tau_2 + \cdots + u_1\tau_k + l_1; \\ v_2 = a_2\tau_1 + b_2\tau_2 + \cdots + u_2\tau_k + l_1; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n = a_n\tau_1 + b_n\tau_2 + \cdots + u_n\tau_k + l_n. \end{array}\right\} \quad (1.13)$$

Сформулируем последовательность составления параметрических уравнений поправок:

1. Выбор параметров и установление математической зависимости между измеренными величинами и выбранными параметрами вида (1.1).

В практике обработки геодезических измерений в качестве параметров принимают, как правило, величины, которые в результате решения задачи необходимо найти (координаты определяемых геодезических пунктов, высоты определяемых реперов и т.п.).

2. Определение приближенных значений параметров t_j^0 с требуемой точностью.

3. Вычисление по формулам (1.9) коэффициентов b_{ij} и свободных членов l_i параметрических уравнений поправок и формирование матриц B и L.

4. Запись системы уравнений поправок в виде (1.11), если в этом есть необходимость.

1.3. Решение параметрических уравнений поправок по методу наименьших квадратов

Как мы установили ранее, система уравнений поправок (1.11) является неопределенной. Для однозначного решения данной системы необходимо наложить на поправки к результатам измерений требование принципа наименьших квадратов, которое в матричной форме может быть записано следующим образом

$$V^T PV = \min . \tag{1.14}$$

Так как, исходя из (1.12) $V = B\tau + L$ и $V^T = \tau^T B + L^T$, то $G = V^T PV = \min$ может быть записано

$$\begin{gathered} G = (\tau^T B^T + L^T)P(B\tau + L) = \\ = \tau^T B^T PB\tau + L^T PB\tau + \tau^T B^T PL + L^T PL = \min . \end{gathered} \tag{1.15}$$

Так как каждое слагаемое данного выражения есть матрица размера 1x1, т.е. число, а число - частный случай симметрической матрицы, для которой справедливо равенство исходной и транспонированной матриц, то с учетом, что $P^T = P$ будем иметь $L^T PB\tau = \tau^T B^T PL$.

Тогда

$$G = \tau^T B^T PB\tau + 2L^T PB\tau + L^T PL = \min . \tag{1.16}$$

Для нахождения минимума функции G возьмем частные производные $\left(\dfrac{\partial G}{\partial \tau}\right)_0$ и приравняем их к нулю. Используя правило матричного дифференцирования, будем иметь:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \tau}\right)_0 = 2\tau^T B^T PB + 2L^T PB = 0 .$$

Транспонируя последнее выражение, получим так называемую систему нормальных уравнений, состоящую из k уравнений и имеющую k неизвестных, вида

$$(B^T PB)\tau + B^T PL = 0 . \tag{1.17}$$

Данная система с введением обозначений $B^T PB = N$; $B^T PL = \lambda$ может быть записана

$$N\tau + \lambda = 0, \qquad (1.18)$$

где N – матрица нормальных уравнений порядка k; λ - вектор свободных членов нормальных уравнений размера kx1.

Объединив системы уравнений (1.18) и (1.12), получим систему, состоящую из $n+k$ уравнений с $n+k$ неизвестными, которая будет иметь единственное решение, отвечающее принципу наименьших квадратов

$$\left.\begin{aligned} N\tau + \lambda = 0 \\ V = B\tau + L \end{aligned}\right\}. \qquad (1.19)$$

Однако на практике систему (1.19) решают в два этапа. Вначале из решения системы нормальных уравнений отыскивают поправки τ_j $(j = 1, 2, \cdots, k)$ к приближенным значениям параметров, а затем находят поправки к результатам измерений по формулам (1.12). Найдем решение нормальных уравнений, исходя из того, что система (1.18) имеет неособенную матрицу N, т.е. $\det N \neq 0$. Тогда для нее всегда может быть определена обратная матрица N^{-1}. Умножая на нее слева матричное уравнение (1.18), получим

$$N^{-1}N\tau + N^{-1}\lambda = 0.$$

Так как $N^{-1}N = E$, где Е - единичная матрица, то

$$\tau = -N^{-1}\lambda = -(B^T PB)^{-1} B^T PL. \qquad (1.20)$$

Тогда векторы уравненных значений параметров и уравненных значений измеренных величин будут соответственно равны

$$t = t^0 + \tau;\; X' = X + V. \qquad (1.21)$$

Основные формулы параметрического способа уравнивания можно свести к линейным преобразованиям вектора свободных членов уравнений поправок L в вектор поправок V к результатам измерений. А именно, подставив (1.20) в (1.12) получим

$$V = -B(B^T PB)^{-1} B^T PL + L = (E - B(B^T PB)^{-1} B^T P)L.$$

Ведя обозначения

$$B(B^T PB)^{-1} B^T P = U_B \text{ и } E - U_B = P_B, \qquad (1.22)$$

будем иметь

$$V = P_B L, \qquad (1.23)$$

где U_B, P_B - матрицы линейных преобразований. Для их вычисления достаточно иметь матрицу B коэффициентов параметрических уравнений поправок и весовую матрицу P результатов измерений.

Формулы (1.22), (1.23) применяются при исследованиях геодезических построений методом математического моделирования, при обработке наблюдений, когда точность измерений и конфигурация построения сохраняются, а меняются только результаты измерений. Достаточно один раз получить матрицу P_B, записать ее в память компьютера, и объем вычислений при строгом уравнивании в каждом последующем цикле существенно сокращается.

Сформулируем основные свойства матрицы $U_B = B(B^T PB)^{-1} B^T P$.

Свойство 1. Матрица и является квадратной порядка n.

Свойство 2. Сумма элементов главной диагонали равна k - числу необходимых измерений (параметров).

Свойство 3. Многократное умножение матрицы U_B на саму себя не изменяет ее значение, т.е. $U_B = \prod_{i=2}^{\infty} U_B^i$.

Свойство 4. Умножение исходной матрицы B слева на матрицу U_B не изменяет значение исходной, т.е. $U_B B = B$.

Свойство 5. Матрица U_B преобразует вектор V в нулевой вектор, т.е. $U_B V = 0$.

Матрица $P_B = E - U_B$ обладает следующими свойствами.

Свойство 1. Матрица P_B является квадратной порядка n.

Свойство 2. Сумма элементов главной диагонали равна количеству избыточных измерений $r = n - k$.

Свойство 3. Многократное умножение матрицы P_B саму себя не изменяет ее значение, т.е. $P_B = \prod_{i=2}^{\infty} P_B^i$.

Свойство 4. Умножение P_B справа на исходную матрицу B дает нулевую матрицу, т.е. $P_B B = 0$.

Свойство 5. Матрица P_B преобразует разность векторов поправок V и свободных членов L в нулевой вектор, т.е. $P_B (V - L) = 0$.

1.4. Нормальные уравнения неизвестных и их свойства

Матричная запись системы нормальных уравнений неизвестных имеет вид $N\tau + \lambda = 0$.

Несложно убедиться, что матрица коэффициентов нормальных уравнений N равна

$$N = B^T PB = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1k} & b_{2k} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [pb_1b_1] & [pb_1b_2] & \cdots & [pb_1b_k] \\ [pb_2b_1] & [pb_2b_2] & \cdots & [pb_2b_k] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [pb_kb_1] & [pb_kb_2] & \cdots & [pb_kb_k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & \cdots & N_{1k} \\ N_{21} & N_{22} & \cdots & N_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{k1} & N_{k2} & \cdots & N_{kk} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} N_{11} &= [pb_1b_1] = \underline{p_1b_{11}b_{11}} + \underline{\underline{p_2b_{21}b_{21}}} + \cdots + p_nb_{n1}b_{n1}; \\ N_{12} &= [pb_1b_2] = \underline{p_1b_{11}b_{12}} + \underline{\underline{p_2b_{21}b_{22}}} + \cdots + p_nb_{n1}b_{n2}; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ N_{1k} &= [pb_1b_k] = \underline{p_1b_{11}b_{1k}} + \underline{\underline{p_2b_{21}b_{2k}}} + \cdots + p_nb_{n1}b_{nk}; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ N_{kk} &= [pb_kb_k] = \underline{p_1b_{1k}b_{1k}} + \underline{\underline{p_2b_{2k}b_{2k}}} + \cdots + p_nb_{nk}b_{nk}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Аналогично, вектор свободных членов будет равен

$$\lambda = B^T PL = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1k} & b_{2k} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ l_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [pb_1l] \\ [pb_2l] \\ \cdots \\ [pb_kl] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_k \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= [pb_1l] = \underline{p_1b_{11}l_1} + \underline{\underline{p_2b_{21}l_2}} + \cdots + p_nb_{n1}l_n; \\ \lambda_2 &= [pb_2l] = \underline{p_1b_{12}l_1} + \underline{\underline{p_2b_{22}l_2}} + \cdots + p_nb_{n2}l_n; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 &= [pb_kl] = \underline{p_1b_{1k}l_1} + \underline{\underline{p_2b_{2k}l_2}} + \cdots + p_nb_{nk}l_n. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Подставив эти значения в формулу $N\tau + \lambda = 0$ и считая, что

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \cdots \\ \tau_k \end{bmatrix},$$

систему нормальных уравнений в развернутом виде запишем

$$\left.\begin{aligned} [pb_1b_1]\tau_1 + [pb_1b_2]\tau_2 + \cdots + [pb_1b_k]\tau_k + [pb_1l] = 0; \\ [pb_2b_1]\tau_1 + [pb_2b_2]\tau_2 + \cdots + [pb_2b_k]\tau_k + [pb_2l] = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [pb_kb_1]\tau_1 + [pb_kb_2]\tau_2 + \cdots + [pb_kb_k]\tau_k + [pb_kl] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1.26)$$

Для случая равноточных измерений будем иметь

$$\left.\begin{aligned} [b_1b_1]\tau_1 + [b_1b_2]\tau_2 + \cdots + [b_1b_k]\tau_k + [b_1l] = 0; \\ [b_2b_1]\tau_1 + [b_2b_2]\tau_2 + \cdots + [b_2b_k]\tau_k + [b_2l] = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [b_kb_1]\tau_1 + [b_kb_2]\tau_2 + \cdots + [b_kb_k]\tau_k + [b_kl] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1.27)$$

Часто систему нормальных уравнений в буквенном выражении записывают

$$\left.\begin{aligned} N_{11}\tau_1 + N_{12}\tau_2 + \cdots + N_{1k}\tau_k + \lambda_1 = 0; \\ N_{21}\tau_1 + N_{22}\tau_2 + \cdots + N_{2k}\tau_k + \lambda_2 = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ N_{k1}\tau_1 + N_{k2}\tau_2 + \cdots + N_{kk}\tau_k + \lambda_k = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1.28)$$

Если параметрические уравнения поправок записываются в виде (1.13), то нормальные уравнения в буквенном выражении будут выглядеть

$$\left.\begin{aligned} [paa]\tau_1 + [pab]\tau_2 + \cdots + [pau]\tau_k + [pal] = 0; \\ [pba]\tau_1 + [pbb]\tau_2 + \cdots + [pbu]\tau_k + [pbl] = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [pua]\tau_1 + [pub]\tau_2 + \cdots + [puu]\tau_k + [pul] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1.29)$$

Рассматривая системы нормальных уравнений (1.26) - (1.29), нетрудно заметить их характерные свойства:

а) элементы главной диагонали, так называемые квадратичные коэффициенты - всегда положительны, поскольку получены суммированием квадратов чисел;

б) коэффициенты, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой.

Последнее свойство позволяет записать систему нормальных уравнений в сокращенном виде. При этом записываются только члены с квадратичными коэффициентами при неизвестных и все члены, расположенные выше и правее главной диагонали, а члены, расположенные левее и ниже этой диагонали, опускаются. Например, система нормальных уравнений (1.26) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} [pb_1b_1]\tau_1 + [pb_1b_2]\tau_2 + \cdots + [pb_1b_k]\tau_k + [pb_1l] &= 0; \\ [pb_2b_2]\tau_2 + \cdots + [pb_2b_k]\tau_k + [pb_2l] &= 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ [pb_kb_k]\tau_k + [pb_kl] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.30)$$

Таким образом, **нормальные уравнения неизвестных** – частный вид линейных уравнений, имеющих симметрическую матрицу коэффициентов с положительными элементами главной диагонали, предназначенными для нахождения поправок к приближенным значениям параметров.

Реализация матричных формул вычисления коэффициентов N и свободных членов λ нормальных уравнений на компьютере связана с необходимостью хранения в оперативной памяти компьютера матриц $B, P, B^T, L,$ что при больших системах нормальных уравнений крайне неэффективно. Параметрический способ уравнивания позволяет вычислять матрицы N и λ так называемым методом накопления. Рассмотрим его суть. По результатам первого измерения вычисляются по формулам (1.9) коэффициенты $b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1k}$ и свободный член l_1 первого уравнения поправок. Далее, зная вес первого результата измерения p_1, вычисляются элементы $p_1b_{11}b_{11}, p_1b_{11}b_{12}, \cdots, p_1b_{11}b_{1k}, \cdots, p_1b_{1k}b_{1k}$ и $p_1b_{11}l_1$, $p_1b_{12}l_1, \cdots, p_1b_{1k}l_1$ (подчеркнутые одной чертой в формулах (1.24), (1.25)) и заносятся в отведенные для этого в оперативной памяти ячейки для хранения матриц N и λ. По результатам второго измерения вычисляются элементы, подчёркнутые двумя чертами и складываются с соответствующими элементами, вычисленными ранее, и т. д. Таким образом, составление матриц N и λ в параметрическом способе уравнивания можно выполнить по результатам измерений без хранения в памяти компьютера матриц B и L.

Решение нормальных уравнений может быть выполнено различными методами линейной алгебры:

- прямые методы: определителей, обращения матриц, последовательного исключения неизвестных (Гаусса, квадратных корней) и др.

- итерационные методы: простой итерации, Зейделя и др.

Выбор метода решения нормальных уравнений определяется условиями каждой конкретной задачи. Как правило, применяют методы, позволяющие, с одной стороны, легко получить решения и, одновременно, с другой стороны, получить данные для оценки точности измеренных величин и их функций.

Контроль вычисления неизвестных можно осуществить, подставляя их значения в каждое из нормальных уравнений, которые должны удовлетворяться в пределах точности вычислений.

Однако такой контроль не эффективен как с точки зрения значительных затрат времени при ручном счете, так и с точки зрения потери оперативной памяти при вычислении на компьютере, так как необходимо до конца хранить в памяти компьютера коэффициенты нормальных уравнений. Более простым и легко осуществимым является контроль подстановкой неизвестных в так называемое, суммарное уравнение, которое получают суммированием всех нормальных уравнений. Для системы нормальных уравнений (1.28) суммарное может быть записано

$$[N_1]\tau_1 + [N_2]\tau_2 + \cdots + [N_k]\tau_k + [\lambda] = 0, \qquad (1.31)$$

где

$$[N_1] = N_{11} + N_{21} + \cdots + N_{k1};$$
$$[N_2] = N_{12} + N_{22} + \cdots + N_{k2};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[N_k] = N_{1k} + N_{2k} + \cdots + N_{kk};$$
$$[\lambda] = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k.$$

1.5. Последовательность уравнительных вычислений параметрическим способом

1. Установление системы измеренных величин $x_1, x_2, \cdots, x_n$ и весов результатов измерений $p_1, p_2, \cdots, p_n$. Определение числа необходимых k и избыточно измеренных r величин.

2. Составление системы уравнений поправок $V = B\tau + L$ в последовательности, изложенной в 1.2.

3. Вычисление матрицы коэффициентов $N = B^T PB$ и вектора свободных членов системы $\lambda = B^T PL$ нормальных уравнений.

Решение системы нормальных уравнений $\tau = -(B^T PB)^{-1} B^T PL$, в результате чего получают поправки τ_j к приближенным значениям параметров.

4. Вычисление поправок к результатам измерений с помощью уравнений $V = B\tau + L$.

5. Определение уравненных значений параметров $t = t^0 + \tau$ и уравненных значений измеренных величин $X' = X + V$.

6. Контроль уравнивания путем подстановки уравненных значений x_i' и t_j в параметрические уравнения связи (1.1).

7. Оценка точности по материалам уравнивания.

Обратим внимание, что несоблюдение контроля уравнивания может происходить не только из-за погрешностей вычислений, но и вследствие недостаточной точности определения приближенных значений неизвестных $t_1^0, t_2^0, \cdots, t_k^0$, в результате чего нельзя пренебрегать нелинейными членами разложения в ряд Тейлора функции $\varphi_i(t_1^0 + \tau_1, t_2^0 + \tau_2, \cdots, t_k^0 + \tau_k)$ в равенствах (1.7). В этом случае полученные после уравнивания величины $t_1, t_2, \cdots, t_k$ следует рассматривать лишь как уточненные приближенные значения параметров t_j и с ними необходимо повторить уравнивание, начиная с вычисления коэффициентов $b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{ik}$ и свободных членов l_i параметрических уравнений поправок по формулам (1.9). Именно поэтому в геодезической практике системы параметрических уравнений поправок довольно часто решают по методу наименьших квадратов путем последовательных приближений.

2. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ СПОСОБЕ УРАВНИВАНИЯ

2.1. Задача оценки точности

В общем случае задача оценки точности сводится к вычислению ковариационной матрицы $K_{\text{ОВ}}$ вектора оцениваемых величин по формуле $K_{\text{ОВ}} = \mu^2 Q_{\text{ОВ}}$, где μ – средняя квадратическая погрешность единицы веса; $Q_{\text{ОВ}}$ – обратная весовая матрица оцениваемого вектора.

Матрицы $K_{\text{ОВ}}$ и $Q_{\text{ОВ}}$ имеют следующий вид:

$$K_{\text{ОВ}} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1^2 & r_{12}m_1m_2 & \cdots & r_{1n}m_1m_n \\ r_{21}m_2m_1 & m_2^2 & \cdots & r_{2n}m_2m_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1}m_nm_1 & r_{n2}m_nm_2 & \cdots & m_n^2 \end{bmatrix};$$

$$Q_{\text{ОВ}} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/p_1 & r_{12}/\sqrt{p_1p_2} & \cdots & r_{1n}/\sqrt{p_1p_n} \\ r_{21}/\sqrt{p_2p_1} & 1/p_2 & \cdots & r_{2n}/\sqrt{p_2p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1}/\sqrt{p_np_1} & r_{n2}/\sqrt{p_np_2} & \cdots & 1/p_n \end{bmatrix},$$

где

K_{ij} - элементы ковариационной матрицы;

m_i - средняя квадратическая погрешность оцениваемой величины;

r_{ij} - коэффициенты корреляции между оцениваемыми величинами;

Q_{ij} - элементы обратной весовой матрицы;

p_i - веса оцениваемых величин.

В учебной литературе по геодезии часто обратную весовую матрицу $Q_{\text{ОВ}}$ называют матрицей весовых коэффициентов.

Заметим, что матрицы $K_{\text{ОВ}}$ и $Q_{\text{ОВ}}$ являются квадратными, симметрическими. Диагональными элементами матриц $K_{\text{ОВ}}$ являются квадраты средних квадратических погрешностей, а матрицы $Q_{\text{ОВ}}$ – обратные веса оцениваемых величин.

В частном случае, для одной оцениваемой величины, ее средняя квадратическая погрешность будет равна

$$m_i = \mu\sqrt{Q_{ii}} = \mu\sqrt{1/p_i}\,. \qquad (2.1)$$

По элементам как ковариационной, так и обратной весовой матриц можно вычислить коэффициенты корреляции

$$r_{ij} = K_{ij}\Big/\sqrt{K_{ii}K_{jj}}\,;\; r_{ij} = Q_{ij}\Big/\sqrt{Q_{ii}Q_{jj}}\,, \qquad (2.2)$$

характеризующими степень линейной зависимости оцениваемых величин, и сформировать матрицу коэффициентов корреляции оцениваемого вектора

$$R_{\text{ОВ}} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица $R_{\text{ОВ}}$ является квадратной, симметрической, ее диагональными элементами являются единицы.

Оцениваемыми величинами в параметрическом способе уравнивания могут быть:

- вектор t уравненных значений параметров;
- вектор X' уравненных значений измеренных величин;
- вектор-функция Φ от уравненных параметров (реже, от уравненных значений измеренных величин).

На практике ковариационные матрицы вычисляют редко, ограничиваясь вычислением средних квадратических погрешностей оцениваемых величин по формулам (2.1), используя для этого μ и диагональные элементы обратной весовой матрицы.

Таким образом, полная оценка точности по материалам параметрического способа уравнивания состоит в вычислении:

1. Средней квадратической погрешности единицы веса μ.
2. Обратных весовых матриц векторов:
   - уравненных параметров Q_t;
   - уравненных значений измеренных величин $Q_{X'}$;
   - функции уравненных параметров Q_Φ.
3. Средних квадратических погрешностей:
   - уравненных параметров m_{t_j};
   - уравненных значений измеренных величин m_{X_i};
   - функции уравненных параметров m_{Φ_i}.
4. Матриц коэффициентов корреляции векторов t, X', Φ, которые обозначим R_t, $R_{X'}$, R_Φ.

2.2. Вычисление средней квадратической погрешности единицы веса. Способы вычисления $[pv^2]$

Вычисление средней квадратической погрешности единицы веса выполняется по результатам уравнивания с использованием формулы

$$\mu = \sqrt{[pv^2]/(n-k)},$$

где $n-k=r$ - число избыточных измерений.

Значение $[pv^2]$ может быть вычислено различными способами.

<u>Первый способ</u>

$$[pv^2] = V^T PV, \tag{2.3}$$

т.е. вычисление $[pv^2]$ сводится к вычислению значения квадратичной формы $V^T PV$, где вектор V определяется по материалам уравнивания.

В обычной записи

$$[pv^2] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_n v_n^2, \tag{2.4}$$

т.е. $[pv^2]$ равна сумме произведений квадратов поправок v_i на соответствующие веса p_i результатов измерений.

<u>Второй способ</u>

$$[pv^2] = \tau^T \lambda + L^T PL. \tag{2.5}$$

Для доказательства (2.5) равенство (1.15) представим в виде

$$V^T PV = \tau^T (B^T PB\tau + B^T PL) + L^T PB\tau + L^T PL.$$

Так как выражение в скобках, являющееся системой нормальных уравнений, равно нулю, то

$$V^T PV = L^T PB\tau + L^T PL. \tag{2.6}$$

Транспонируя левую и правую части (при этом $P^T = P$) и учитывая, что $B^T PL = \lambda$, приходим к (2.5).

В развернутой форме формула (2.5) будет записана

$$[pv^2] = \begin{bmatrix}\tau_1 & \tau_2 \cdots \tau_k\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_k\end{bmatrix} + [l_1 \; l_2 \cdots l_n] \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ l_n \end{bmatrix}.$$

После перемножения получим значение $[pv^2]$ в гауссовой форме

$$[pv^2] = [\lambda\tau] + [pll]. \tag{2.7}$$

Обратим внимание, что вычисление $[pv^2]$ вторым способом выполняется без предварительного вычисления поправок к результатам измерений.

<u>Третий способ</u>

$$[pv^2] = L^T PV. \tag{2.8}$$

Для доказательства (2.8) вынесем в правой части выражения (2.6) $L^T P$ за скобки слева. Будем иметь

$$V^T PV = L^T P(B\tau + L).$$

Так как выражение в скобках равно V, то приходим к (2.8).

Раскрывая матричные символы, будем иметь

$$[pv^2] = [l_1\ l_2 \cdots l_n]\begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix} =$$

$$= p_1 l_1 v_1 + p_2 l_2 v_2 + \cdots + p_n l_n v_n = [plv]. \qquad (2.9)$$

Если уравниваются равноточные измерения, то для нахождения средней квадратической погрешности измерения вычисляется $[v^2]$.

Заметим, что по значениям $[pv^2]$, вычисленным различными способами, осуществляется контроль правильности решения параметрических уравнений поправок по методу наименьших квадратов.

2.3. Вычисление обратной весовой матрицы уравненных параметров

Общий подход к вычислению обратной весовой матрицы оцениваемого вектора состоит в следующем:

- выражение составляющих оцениваемого вектора в виде функции элементов другого вектора, обратная весовая матрица которого известна. Например, в матричной форме вектор уравненных параметров через вектор независимых измерений x, обратная весовая матрица которого известна и равна Q, может быть выражен

$$t = t^0 + \tau = t^0 - (B^T PB)^{-1} B^T PL = t^0 - (B^T PB)^{-1} B^T P(\varphi(t^0) - X);$$

- нахождение матрицы частных производных F оцениваемой функции по вектору с известной обратной весовой матрицей. Для рассматриваемого случая

$$F = \left(\frac{\partial t}{\partial X}\right)_0 = (B^T PB)^{-1} B^T P;$$

- вычисление обратной весовой матрицы оцениваемого вектора путем перемножения матриц F, Q, F^T. Для нашего случая, так как $F^T = PB(B^T PB)^{-1}$, будем иметь

$$Q_t = FQF^T = (B^T PB)^{-1} B^T PQPB(B^T PB)^{-1}.$$

Учитывая, что $PQ = E$, $(B^T PB)^{-1} B^T PB = E$, окончательно получим

$$Q_t = (B^T PB)^{-1} = N^{-1}. \tag{2.10}$$

Таким образом, обратная весовая матрица вектора уравненных параметров равна обратной матрице от матрицы коэффициентов нормальных уравнений.

При выполнении уравнивания в операторах матричной алгебры матрица N^{-1} определяется всегда при решении системы нормальных уравнений, см. (1.20). Как видим, задача определения Q_t решается довольно просто.

<u>Частный случай.</u> Если решение системы нормальных уравнений выполняется без нахождения обратной матрицы N^{-1}, то обратный вес уравненного значения отдельного параметра можно вычислить совместно с решением нормальных уравнений. Очевидное равенство $NQ_t = E$ приведем к виду $NQ_t - E$ и запишем его в развернутой форме

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & \cdots & N_{1k} \\ N_{21} & N_{22} & \cdots & N_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{k1} & N_{k2} & \cdots & N_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{k1} & Q_{k2} & \cdots & Q_{kk} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Для определения, например, элементов первого столбца матрицы Q_t умножим строки матрицы N на первый столбец матрицы Q_t. Получим следующую систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} N_{11}Q_{11} + N_{12}Q_{21} + \cdots + N_{1k}Q_{k1} - 1 = 0; \\ N_{21}Q_{11} + N_{22}Q_{21} + \cdots + N_{2k}Q_{k1} \qquad = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ N_{k1}Q_{11} + N_{k2}Q_{21} + \cdots + N_{kk}Q_{k1} \qquad = 0, \end{array}\right\}$$

коэффициентами при неизвестных Q_{ij} которой являются коэффициенты нормальных уравнений, а вектор свободных членов равен $[-1 \quad 0 \ \cdots \ 0]$. Решение данной системы может быть выполнено теми или иными методами линейной алгебры. Аналогичным образом можно вычислить элементы любого столбца матрицы Q_t, в том числе и все столбцы матрицы Q_t.

2.4. Вычисление обратной весовой матрицы вектор-функции от уравненных параметров

Оцениваемые величины в данном случае являются функциями необходимых параметров

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_{\text{m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(t_1, t_2, \cdots, t_k) \\ \Phi_2(t_1, t_2, \cdots, t_k) \\ \cdots \\ \Phi_m(t_1, t_2, \cdots, t_k) \end{bmatrix}.$$

Поэтому можно сформировать матрицу частных производных размера mxk

$$F = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t_k}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t_k}\right)_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial t_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial t_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial t_k}\right)_0 \end{bmatrix}$$

и реализовать матричную формулу

$$Q_\Phi = FQ_tF^T. \qquad \text{Т (2.11)}$$

<u>Частный случай.</u> Если оценивается одна функция вида $\Phi = \Phi(t_1, t_2, \cdots, t_k)$, то матрица частных производных будет матрицей – строкой $F = \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t_1}\right)_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t_2}\right)_0 \cdots \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t_k}\right)_0 \right]$, и в этом случае обратная весовая матрица оцениваемой функции вырождается в число, равное обратному весу $1/p_\Phi$ функции, т.е.

$$1/p_\Phi = FQ_tF^T. \qquad (2.12)$$

<u>Частный случай.</u> Если Q_t не задана или ее трудно получить, то обратный вес оцениваемой функции можно вычислить совместно с решением нормальных уравнений. Для этого обратный вес функции (2.12) представим

$$1/p_\Phi = FY, \qquad (2.13)$$

где $Y = Q_tF^T$.

Помножим выражение для Y слева на матрицу коэффициентов нормальных уравнений N. Получим $NY = NQ_t F^T$. Так как $NQ_t = E$, то

$$NY - F^T = 0. \quad (2.14)$$

Система уравнений (2.14) от системы нормальных уравнений неизвестных (1.18) отличается вектором свободных членов.

Для отыскания неизвестных Y_j $(j = 1, 2, \cdots, k)$ необходимо заменить в системе нормальных уравнений неизвестных столбец свободных членов столбцом частных производных, взятых с обратным знаком, и решить эту систему любым способом линейной алгебры. После чего найти обратный вес по формуле (2.13).

2.5. Вычисление обратной весовой матрицы вектора уравненных значений измеренных величин

Вектор уравненных значений измеренных величин представим в виде функции измеренного вектора, обратная весовая матрица Q которого известна,

$$X' = X + V.$$

Так как в соответствии с (1.23) и (1.22) $V = P_B L = (E - U_B)L$ и в соответствии с (1.10) $L = \varphi(t^0) - X$, то

$$X' = X + (E - U_B)(\varphi(t^0) - X).$$

Тогда матрица частных производных будет равна

$$F = \left(\frac{\partial X'}{\partial X}\right)_0 = U_B,$$

где $U_B = B(B^T PB)^{-1} B^T P$ (см. формулы (1.22)) и соответственно

$$F^T = PB(B^T PB)^{-1} B^T.$$

Искомая обратная весовая матрица вектора X' будет

$$Q_{X'} = FQF^T = B(B^T PB)^{-1} B^T PQPB(B^T PB)^{-1} B^T.$$

Так как $PQ = E$ и $B^T PB(B^T PB)^{-1} = E$, то окончательно будем иметь

$$Q_{X'} = B(B^T PB)^{-1} B^T = BQ_t B^T. \quad (2.15)$$

Частный случай. Обратный вес уравненного значения одной измеренной величины можно вычислить по формуле (2.13) в последовательности, изложенной в разделе 2.4, заменив столбец свободных членов системы нормальных уравнений столбцом, составленным из коэффициентов параметрических уравнений поправок, что нетрудно заметить из сравнения формул (2.11) и (2.15), так как в этом случае $F = B$.

3. ПРИМЕРЫ УРАВНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

3.1. Уравнивание нивелирной сети параметрическим способом

Задание. Определить высоты определяемых пунктов 1, 2 и 3 (см. рисунок 3.1), выполнив уравнивание нивелирной сети параметрическим способом. Выполнить оценку точности уравненных высот определяемых пунктов, уравненных превышений между пунктами, а также превышения между пунктами 1 и 3.

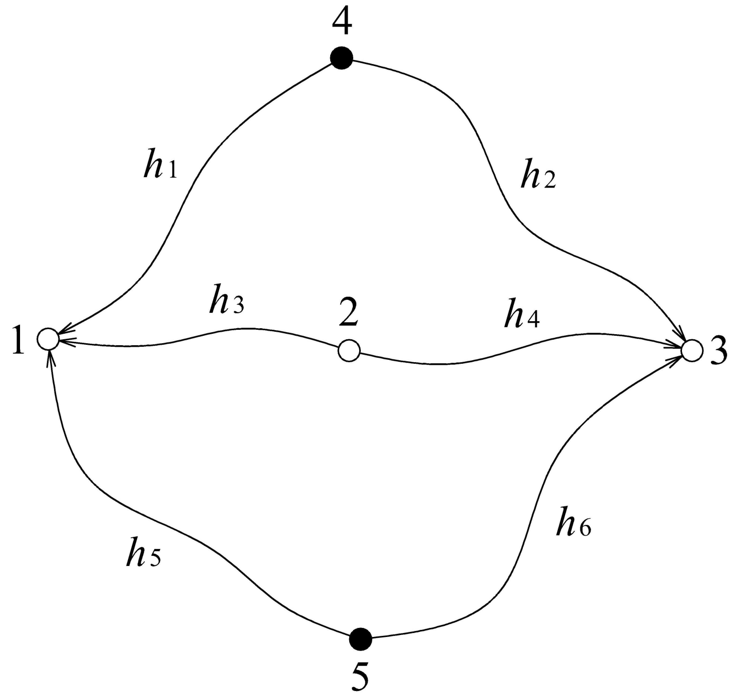

Рисунок 3.1 – Схема нивелирной сети

Исходные данные.

Высоты исходных пунктов: $H_4 = 6{,}061$ м; $H_5 = 7{,}295$ м. Погрешности высот исходных пунктов пренебрегаемо малы. Измеренные превышения между пунктами: $h_1 = 0{,}405$ м; $h_2 = 2{,}290$ м; $h_3 = -0{,}715$ м; $h_4 = 1{,}155$ м; $h_5 = -0{,}830$ м; $h_6 = 1{,}055$ м. Длины сторон нивелирной сети: $L_1 = 2{,}2$ км; $L_2 = 2{,}5$ км; $L_3 = 1{,}1$ км; $L_4 = 1{,}3$ км; $L_5 = 2{,}9$ км; $L_6 = 3{,}1$ км.

Решение.

Очевидно, что измеренными величинами являются превышения между пунктами нивелирной сети. Они образуют вектор измеренных значений

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}405 \\ 2{,}290 \\ -0{,}715 \\ 1{,}155 \\ -0{,}830 \\ 1{,}055 \end{bmatrix} \text{ м.}$$

По формуле $p = c/L$, вычислим веса результатов измерений, принимая, что $c = 4$. Считая измерения независимыми, сформируем матрицу P весов результатов измерений

$$P = \begin{bmatrix} 1{,}82 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}63 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3{,}08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}29 \end{bmatrix}.$$

Приступим к составлению уравнений поправок. Так как количество необходимых измерений равно $k = 4$, то и число независимых параметров равно 4. В их качестве примем высоты определяемых пунктов: $t_1 = H_1$; $t_2 = H_2$; $t_3 = H_3$.

Выразим уравненные значения измеренных величин в функции выбранных параметров:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= h_1' = t_1 - H_4; \\ \varphi_2 &= h_2' = t_3 - H_4; \\ \varphi_3 &= h_3' = t_1 - t_2; \\ \varphi_4 &= h_4' = t_3 - t_2; \\ \varphi_5 &= h_5' = t_1 - H_5; \\ \varphi_6 &= h_6' = t_3 - H_5. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Вычислим приближенные значения параметров, используя результаты непосредственных измерений. Тогда, вектор приближенных значений параметров будет равен

$$t^0 = \begin{bmatrix} t_1^0 \\ t_2^0 \\ t_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_4 + h_1 \\ H_4 + h_2 - h_4 \\ H_4 + h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}466 \\ 7{,}196 \\ 8{,}351 \end{bmatrix} \text{ м.}$$

Так как измеренные величины связаны с необходимыми параметрами линейными функциями простейшего вида, то частные производные $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right)_0$ будут равны 0, или +1, или -1. Тогда матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок B будет равна:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим значения свободных членов параметрических уравнений поправок, учитывая формулу (1.9).

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^0 - H_4 - h_1 \\ t_3^0 - H_4 - h_2 \\ t_1^0 - t_2^0 - h_3 \\ t_3^0 - t_2^0 - h_4 \\ t_1^0 - H_5 - h_5 \\ t_3^0 - H_5 - h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ мм.}$$

Таким образом, систему параметрических уравнений поправок вида (1.12) применительно к условиям данной задачи можно записать

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ мм.}$$

Для составления системы нормальных уравнений неизвестных вычислим матрицу коэффициентов $N = B^T PB$ и вектор свободных членов $\lambda = B^T PL$ нормальных уравнений. Контроль правильности вычисления элементов этих матриц осуществим путем введения дополнительной строки в левой матрице-сомножителе, элементы которой есть сумма вышестоящих элементов. Выполнив перемножение по правилам матричной алгебры, в результирующей матрице мы также получим дополнительную строку. Элементы этой строки должны быть равны сумме вышестоящих элементов.

$$N = B^T PB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1{,}82 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}63 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3{,}08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}29 \end{bmatrix} \cdot B =$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}82 & 0 & 3{,}64 & 0 & 1{,}38 & 0 \\ 0 & 0 & -3{,}64 & -3{,}08 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}60 & 0 & 3{,}08 & 0 & 1{,}29 \\ \hline 1{,}82 & 1{,}60 & 0 & 0 & 1{,}38 & 1{,}29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6{,}84 & -3{,}64 & 0 \\ -3{,}64 & 6{,}72 & -3{,}08 \\ 0 & -3{,}08 & 5{,}97 \\ \hline 3{,}20 & 0 & 2{,}89 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом получим вектор свободных членов

$$\lambda = \begin{bmatrix} -53,22 \\ 54,60 \\ 1,29 \\ \hline 2,67 \end{bmatrix}.$$

Систему нормальных уравнений неизвестных можно записать

$$\begin{bmatrix} 6,84 & -3,64 & 0 \\ -3,64 & 6,72 & -3,08 \\ 0 & -3,08 & 5,97 \\ \hline 3,20 & 0 & 2,89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -53,22 \\ 54,60 \\ 1,29 \\ \hline 2,67 \end{bmatrix} = 0.$$

Коэффициенты последней строки являются коэффициентами суммарного нормального уравнения, т.е. суммарное уравнение имеет вид

$$3,20\tau_1 + 2,89\tau_3 + 2,67 = 0. \tag{3.2}$$

Обращение матрицы N выполним на компьютере. Получим

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 0,235 & 0,167 & 0,086 \\ 0,167 & 0,313 & 0,162 \\ 0,086 & 0,162 & 0,251 \end{bmatrix}.$$

По формуле (1.20) вычислим вектор поправок к приближенным значениям параметров

$$\tau = \begin{bmatrix} 3,3 \\ -8,4 \\ -4,6 \end{bmatrix} \text{ мм.}$$

Подставив значения τ_i в суммарное уравнение (3.2), осуществим контроль решения нормальных уравнений.

С округлением до целых миллиметров $\tau = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ -5 \end{bmatrix}$ мм.

Выполним матричные операции для вычисления поправок V к результатам измерений по формуле (1.12). Будем иметь

$$V = B\tau + L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,3 \\ -8,4 \\ -4,6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,3 \\ -4,6 \\ -3,3 \\ 3,9 \\ 4,3 \\ -3,6 \end{bmatrix}$$ мм, или округляя

до целых миллиметров $V = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \\ 4 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ мм.

Тогда векторы уравненных параметров t и уравненных значений измеренных величин h' согласно (1.21) будут

$$t = t^0 + \tau = \begin{bmatrix} 6,466 \\ 7,196 \\ 8,351 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,003 \\ -0,008 \\ -0,005 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,469 \\ 7,188 \\ 8,346 \end{bmatrix} \text{ м;}$$

$$h' = h + V = \begin{bmatrix} 0,405 \\ 2,290 \\ -0,715 \\ 1,155 \\ -0,830 \\ 1,055 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,003 \\ -0,005 \\ -0,003 \\ 0,004 \\ 0,004 \\ -0,004 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,408 \\ 2,285 \\ -0,718 \\ 1,159 \\ -0,826 \\ 1,051 \end{bmatrix} \text{ м.}$$

Выполним контроль уравнивания, подставив уравненные значения t_j и h_i' в исходные уравнения связи (3.1). Получим

$$0{,}408 = 6{,}469 - 6{,}061 = 0{,}408\,\text{м};$$

$$2{,}285 = 8{,}346 - 6{,}061 = 2{,}285\,\text{м};$$

$$-0{,}718 = 6{,}469 - 7{,}188 = -0{,}719\,\text{м};$$

$$1{,}159 = 8{,}346 - 7{,}188 = 1{,}158\,\text{м};$$

$$-0{,}826 = 6{,}469 - 7{,}295 = -0{,}826\,\text{м};$$

$$1{,}051 = 8{,}346 - 7{,}295 = 1{,}051\,\text{м}.$$

Контроль подтверждает правильность уравнительных вычислений. Незначительные расхождения (до 1 мм) обусловлены погрешностями округления.

Приступим к оценке точности по результатам уравнивания.

Вычислим $[pv^2]$ различными способами.

1. По формуле (2.3)

$$[pv^2] = V^{\mathrm{T}} PV = \begin{bmatrix} 3{,}3 & -4{,}6 & -3{,}3 & 3{,}9 & 4{,}3 & -3{,}6 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1{,}82 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}63 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3{,}08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}29 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3{,}3 \\ -4{,}6 \\ -3{,}3 \\ 3{,}9 \\ 4{,}3 \\ -3{,}6 \end{bmatrix} = 180.$$

2. По формуле $[pv^2] = \tau^T \lambda + L^T PL$

$$[pv^2] = \begin{bmatrix} 3{,}3 & -8{,}4 & -4{,}6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -53{,}22 \\ 54{,}60 \\ 1{,}29 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -15 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1{,}82 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}63 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3{,}08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}29 \end{bmatrix} \cdot$$

$$
\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -642 + 822 = 180.
$$

3. По формуле (2.8)

$$
[pv^2] = L^{\mathrm{T}} PV = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -15 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1{,}82 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}63 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3{,}08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}29 \end{bmatrix} \cdot
$$

$$
\cdot\begin{bmatrix} 3{,}3 \\ -4{,}6 \\ -3{,}3 \\ 3{,}9 \\ 4{,}3 \\ -3{,}6 \end{bmatrix} = 180.
$$

Совпадение значений $[pv^2]$, вычисленных различными способами подтверждает правильность уравнительных вычислений.

Вычислим среднюю квадратическую погрешность единицы веса

$$
\mu = \sqrt{[pv^2]/(n-k)} = \sqrt{180/(6-3)} = 7{,}7 \text{ мм.}
$$

Выполним оценку точности уравненных параметров, т.е. высот определяемых пунктов. Для этого необходимо знать обратную весовую матрицу Q_t вектора уравненных параметров, которая равна N^{-1}.

Используя диагональные элементы этой матрицы, получим средние квадратические погрешности уравненных параметров

$$
m_{t_1} = \mu\sqrt{Q_{t_{11}}} = 7{,}7\sqrt{0{,}24} = 3{,}8 \text{ мм;}
$$

$$
m_{t_2} = \mu\sqrt{Q_{t_{22}}} = 7{,}7\sqrt{0{,}31} = 4{,}2 \text{ мм;}
$$

$$m_{t_3} = \mu\sqrt{Q_{t_{33}}} = 7{,}7\sqrt{0{,}25} = 3{,}8 \text{ мм.}$$

Как видно, наибольшая средняя квадратическая погрешность соответствует пункту 2, наиболее удаленному от исходных пунктов.

По формуле (2.2) вычислим элементы матрицы коэффициентов корреляции уравненных параметров, используя матрицу N^{-1}. Получим (в силу ее симметричности запишем только элементы главной диагонали и находящиеся выше нее)

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}62 & 0{,}35 \\ & 1 & 0{,}58 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Как видно, наиболее тесные положительные корреляционные связи имеют место между высотами соседних в сети пунктов.

Выполним оценку точности вектора уравненных значений измеренных величин. Для этого вычислим обратную весовую матрицу этого вектора по формуле (2.15). В результате получим

$$Q_{h'} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}09 & 0{,}07 & -0{,}08 & 0{,}23 & 0{,}09 \\ & 0{,}25 & -0{,}08 & 0{,}09 & 0{,}09 & 0{,}25 \\ & & 0{,}21 & 0{,}07 & 0{,}07 & -0{,}08 \\ & & & 0{,}24 & -0{,}08 & 0{,}09 \\ & & & & 0{,}23 & 0{,}09 \\ & & & & & 0{,}25 \end{bmatrix}.$$

Тогда средние квадратические погрешности уравненных значений измеренных величин будут равны

$$m_{h'_1} = \mu\sqrt{Q_{h'_{11}}} = 7{,}7\sqrt{0{,}23} = 3{,}7 \text{ мм;}$$

$$m_{h'_2} = \mu\sqrt{Q_{h'_{22}}} = 7{,}7\sqrt{0{,}25} = 3{,}8 \text{ мм;}$$

$$m_{h'_3} = \mu\sqrt{Q_{h'_{33}}} = 7{,}7\sqrt{0{,}21} = 3{,}5 \text{ мм;}$$

$$m_{h'_4} = \mu\sqrt{Q_{h'_{44}}} = 7{,}7\sqrt{0{,}24} = 3{,}8 \text{ мм;}$$

$$m_{h'_5} = \mu\sqrt{Q_{h'_{55}}} = 7{,}7\sqrt{0{,}23} = 3{,}7 \text{ мм;}$$

$$m_{h'_6} = \mu\sqrt{Q_{h'_{66}}} = 7{,}7\sqrt{0{,}25} = 3{,}8 \text{ мм.}$$

Матрица коэффициентов корреляции вектора h' будет

$$R_{h'} = \begin{bmatrix} 1 & 0,35 & 0,30 & -0,34 & 1 & 0,35 \\ & 1 & -0,33 & 0,36 & 0,35 & 1 \\ & & 1 & 0,31 & 0,30 & -0,33 \\ & & & 1 & -0,34 & 0,36 \\ & & & & 1 & 0,35 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

При оценке точности превышения между пунктами 1 и 3, заметим, что они довольно просто выражаются через параметры

$$\Phi = h'_{1-3} = t_3 - t_1 .$$

Возьмем частные производные от этой функции по каждому параметру. Получим вектор строку частных производных размера 1х3

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Реализуя матричную формулу $Q_\Phi = FQ_tF^T$, получим обратный вес искомой функции $Q_\Phi = 0{,}31$. Тогда $m_{h'_{1-3}} = 7{,}7\sqrt{0{,}31} = 4{,}3$ мм.

3.2. Уравнивание обратной линейно-угловой засечки параметрическим способом

Задание. По данным геодезических измерений, выполненным на пункте S (рисунок 3.2), определить координаты данного пункта. Выполнить оценку точности координат определяемого пункта и уравненных значений измеренных величин.

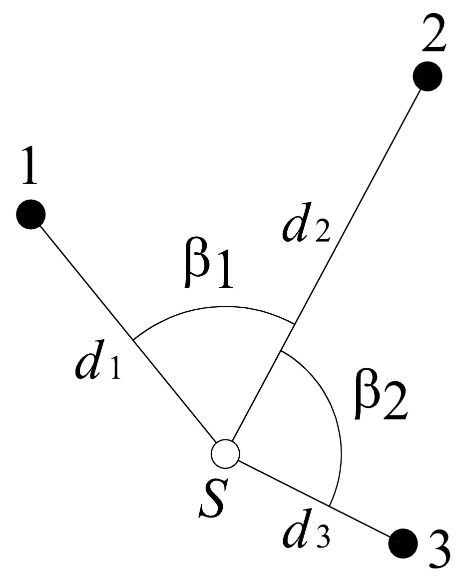

Рисунок 3.2 - Схема линейно-угловой засечки

Исходные данные.

Координаты исходных пунктов: $x_1 = 179{,}237$ м; $y_1 = 38{,}996$ м; $x_2 = 206{,}608$ м; $y_2 = 155{,}088$ м; $x_3 = 77{,}672$ м $y_3 = 155{,}691$ м. Погрешности координат исходных пунктов пренебрегаемо малы.

Результаты измерений: $d_1 = 95{,}866$ м; $d_2 = 115{,}321$ м; $d_3 = 62{,}167$ м; $\beta_1 = 68^\circ 03' 29''$; $\beta_2 = 87^\circ 50' 40''$ и их погрешности $m_d = 3$ мм; $m_\beta = 5''$.

Решение.

Измеренными величинами являются расстояния и углы. Они образуют вектор измеренных значений

$$X = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95{,}866 \text{ м} \\ 115{,}321 \text{ м} \\ 62{,}167 \text{ м} \\ 68^\circ 03' 29'' \\ 87^\circ 50' 40'' \end{bmatrix}.$$

Для вычисления весов измерений воспользуемся формулой $p_i = \dfrac{\mu^2}{m^2{}_i}$. При этом примем за единицу веса среднюю квадратическую погрешность измерения углов $\mu = m_\beta$. Считая измерения независимыми, сформируем матрицу P результатов измерений

$$P = \begin{bmatrix} 2{,}78 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}78 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}78 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Приступим к составлению уравнений поправок. Так как количество необходимых измерений $k = 2$, то и число независимых параметров равно 2. В их качестве примем координаты определяемого пункта S: $t_1 = x'_S$; $t_2 = y'_S$, где x'_S, y'_S - уравненные значения координат определяемого пункта.

Выразим уравненные значения измеренных величин в функции выбранных параметров:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 = d_1' = \sqrt{(x_1 - t_1)^2 + (y_1 - t_2)^2};\\
&\varphi_2 = d_2' = \sqrt{(x_2 - t_1)^2 + (y_2 - t_2)^2};\\
&\varphi_3 = d_3' = \sqrt{(x_3 - t_1)^2 + (y_3 - t_2)^2};\\
&\varphi_4 = \beta_1' = \operatorname{arctg}\big((y_2 - t_2)/(x_2 - t_1)\big) - \operatorname{arctg}\big((y_1 - t_2)/(x_1 - t_1)\big);\\
&\varphi_5 = \beta_2' = \operatorname{arctg}\big((y_3 - t_2)/(x_3 - t_1)\big) - \operatorname{arctg}\big((y_2 - t_2)/(x_2 - t_1)\big).
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Вычислим приближенные значения параметров линейной засечкой, используя результаты измерения расстояний до пунктов 1 и 2. В результате получим вектор приближенных значений параметров

$$t^0 = \begin{bmatrix} t_1^0 \\ t_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105{,}292 \\ 100{,}007 \end{bmatrix} \text{ м.}$$

Для составления матрицы коэффициентов B параметрических уравнений поправок найдем частные производные от функций (3.3) по выбранным параметрам

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}\right)_0 = -\cos\alpha_{S1}; \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2}\right)_0 = -\sin\alpha_{S1};$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}\right)_0 = -\cos\alpha_{S2}; \quad \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2}\right)_0 = -\sin\alpha_{S2};$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial t_1}\right)_0 = -\cos\alpha_{S3}; \quad \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial t_2}\right)_0 = -\sin\alpha_{S3};$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial t_1}\right)_0 = \frac{\rho\sin\alpha_{S2}}{d_{S2}} - \frac{\rho\sin\alpha_{S1}}{d_{S1}}; \quad \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial t_2}\right)_0 = -\frac{\rho\cos\alpha_{S2}}{d_{S2}} + \frac{\rho\cos\alpha_{S1}}{d_{S1}};$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_5}{\partial t_1}\right)_0 = \frac{\rho\sin\alpha_{S3}}{d_{S3}} - \frac{\rho\sin\alpha_{S2}}{d_{S2}}; \quad \left(\frac{\partial \varphi_5}{\partial t_2}\right)_0 = -\frac{\rho\cos\alpha_{S3}}{d_{S3}} + \frac{\rho\cos\alpha_{S2}}{d_{S2}}.$$

где d_{S1}, d_{S2}, d_{S3}, α_{S1}, α_{S2}, α_{S3}, найдены по приближенным значениям параметров. В вычислениях расстояния выражаем в мм, а ρ в секундах, $\rho = 206265''$. В результате будем иметь

$$B=\begin{bmatrix} -0{,}7713 & 0{,}6364 \\ -0{,}8786 & -0{,}4776 \\ 0{,}4444 & -0{,}8959 \\ 2{,}2236 & 0{,}0882 \\ 2{,}1185 & 3{,}0459 \end{bmatrix}.$$

Вычислим значения свободных членов параметрических уравнений поправок

$$L=\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{(x_1-t_1^0)^2+(y_1-t_2^0)^2}-d_1; \\ \sqrt{(x_2-t_1^0)^2+(y_2-t_2^0)^2}-d_2; \\ \sqrt{(x_3-t_1^0)^2+(y_3-t_2^0)^2}-d_3; \\ \operatorname{arctg}\left((y_2-t_2^0)/(x_2-t_1^0)\right)-\operatorname{arctg}\left((y_1-t_2^0)/(x_1-t_1^0)\right)-\beta_1; \\ \operatorname{arctg}\left((y_3-t_2^0)/(x_3-t_1^0)\right)-\operatorname{arctg}\left((y_2-t_2^0)/(x_2-t_1^0)\right)-\beta_2. \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0\,\text{мм} \\ 0\,\text{мм} \\ -9\,\text{мм} \\ -6'' \\ 24'' \end{bmatrix}.$$

Таким образом, систему параметрических уравнений поправок вида (1.12) можно записать

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Для составления системы нормальных уравнений неизвестных вычислим на компьютере матрицу коэффициентов $N=B^TPB$, ей обратную матрицу N^{-1} и вектор свободных членов $\lambda=B^TPL$ нормальных уравнений

$$N=\begin{bmatrix} 13{,}7813 & 5{,}3440 \\ 5{,}3440 & 13{,}2767 \end{bmatrix};\; N^{-1}=\begin{bmatrix} 0{,}08598 & -0{,}03461 \\ -0{,}03461 & 0{,}08925 \end{bmatrix}; \qquad (3.4)$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 26{,}3835 \\ 94{,}9878 \end{bmatrix}.$$

Реализуя матричные операции $\tau = -N^{-1}\lambda$ и $V = B\tau + L$, получим соответственно вектор поправок к координатам определяемого пункта S и вектор поправок к результатам измерений

$$\tau = \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ -7{,}6 \end{bmatrix} \text{ или округляя до целого числа } \tau = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} \text{ мм;}$$

$$V = \begin{bmatrix} -5{,}6 \\ 2{,}7 \\ -1{,}8 \\ -4{,}4 \\ 3{,}1 \end{bmatrix} \text{ или округляя до целого числа } V = \begin{bmatrix} -6\,\text{мм} \\ 3\,\text{мм} \\ -2\,\text{мм} \\ -4'' \\ 3'' \end{bmatrix}.$$

Тогда уравненные значения координат определяемого пункта и результатов измерений будут равны

$$t = t^0 + \tau = \begin{bmatrix} 105{,}292 \\ 100{,}007 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}001 \\ -0{,}008 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105{,}293 \\ 99{,}999 \end{bmatrix} \text{ м;}$$

$$X' = X + V = \begin{bmatrix} 95{,}866\ \text{м} \\ 115{,}321\ \text{м} \\ 62{,}167\ \text{м} \\ 68^\circ 03' 29'' \\ 87^\circ 50' 40'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}006\ \text{м} \\ 0{,}003\ \text{м} \\ -0{,}002\,\text{м} \\ -4'' \\ 3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95{,}860\,\text{м} \\ 115{,}324\,\text{м} \\ 62{,}165\,\text{м} \\ 68^\circ 03' 25'' \\ 87^\circ 50' 43'' \end{bmatrix}.$$

Выполним контроль уравнивания, подставив уравненные значения t_j и x_i' в исходные уравнения связи (3.3). Получим

$$95{,}860\,\text{м} = \sqrt{(179{,}237-105{,}293)^2+(38{,}996-99{,}999)^2} = 95{,}860\,\text{м};$$
$$115{,}324\,\text{м} = \sqrt{(206{,}608-105{,}293)^2+(155{,}088-99{,}999)^2} = 115{,}324\,\text{м};$$
$$62{,}165\,\text{м} = \sqrt{(77{,}672-105{,}293)^2+(155{,}691-99{,}999)^2} = 62{,}165\,\text{м};$$
$$68^\circ 03'25'' = \mathrm{arctg}\big((155{,}088-99{,}999)/(206{,}608-105{,}293)\big)-$$
$$-\,\mathrm{arctg}\big((38{,}996-99{,}999)/(179{,}237-105{,}293)\big) = 68^\circ 03'25'';$$
$$87^\circ 50'43'' = \mathrm{arctg}\big((155{,}691-99{,}999)/(77{,}672-105{,}293)\big)-$$
$$-\,\mathrm{arctg}\big((155{,}691-99{,}999)/(206{,}608-105{,}293)\big) = 87^\circ 50'42''.$$

Контроль подтверждает правильность уравнительных вычислений. Незначительные расхождения в углах (до 1") обусловлены погрешностями округления.

По формуле (2.3) вычислим $[pv^2]=146$. Тогда средняя квадратическая погрешность единицы веса

$$\mu = \sqrt{[pv^2]/(n-k)} = \sqrt{146/(5-2)} = 7{,}0''.$$

Используя диагональные элементы матрицы (3.4), по формуле (2.1) вычислим средние квадратические погрешности уравненных координат пункта S

$$m_{x_S} = m_{t_1} = \mu\sqrt{Q_{t_{11}}} = 7{,}0\sqrt{0{,}0860} = 2{,}0 \text{ мм};$$
$$m_{y_S} = m_{t_2} = \mu\sqrt{Q_{t_{22}}} = 7{,}0\sqrt{0{,}0892} = 2{,}1 \text{ мм}.$$

По формуле (2.2) вычислим элементы матрицы коэффициентов корреляции уравненных параметров

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}40 \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

По формуле (2.15) вычислим обратную весовую матрицу вектора уравненных значений измеренных величин и выполним оценку точности этого вектора

$$Q_{X'} = \begin{bmatrix} 0{,}121 & 0{,}038 & -0{,}114 & -0{,}189 & 0{,}067 \\ & 0{,}058 & -0{,}015 & -0{,}132 & -0{,}162 \\ & & 0{,}116 & 0{,}146 & -0{,}144 \\ & & & 0{,}412 & 0{,}188 \\ & & & & 0{,}767 \end{bmatrix}.$$

Средние квадратические погрешности уравненных значений измеренных величин будут равны

$$m_{d'_1} = \mu\sqrt{Q_{X'_{11}}} = 7{,}0\sqrt{0{,}121} = 2{,}4\,\text{мм};$$
$$m_{d'_2} = \mu\sqrt{Q_{X'_{22}}} = 7{,}0\sqrt{0{,}058} = 1{,}7\,\text{мм};$$
$$m_{d'_3} = \mu\sqrt{Q_{X'_{33}}} = 7{,}0\sqrt{0{,}116} = 2{,}4\,\text{мм};$$
$$m_{\beta'_1} = \mu\sqrt{Q_{X'_{44}}} = 7{,}0\sqrt{0{,}412} = 4{,}5'';$$
$$m_{\beta'_2} = \mu\sqrt{Q_{X'_{55}}} = 7{,}0\sqrt{0{,}767} = 6{,}1''.$$

Матрица коэффициентов корреляции вектора X' будет

$$R_{X'} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}45 & -0{,}96 & -0{,}85 & 0{,}22 \\ & 1 & -0{,}19 & -0{,}86 & -0{,}77 \\ & & 1 & 0{,}66 & -0{,}48 \\ & & & 1 & 0{,}33 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Как видно, наиболее тесные корреляционные связи имеют место между погрешностями расстояний d_1 и d_3, так как угол между линиями S-1 и S-3 близок к 180°, а знак минус означает, что при увеличении погрешности расстояния d_1 уменьшается погрешность расстояния d_3 и наоборот. Наименее тесные корреляционные связи между погрешностями расстояний d_2 и d_3, так как угол между линиями S-2 и S-3 близок к 90°.

3.3. Определение элементов преобразования плановых координат из одной системы в другую

Задание. По заданным координатам четырех опорных точек в местной и условной системах координат определить элементы ориентирования условной системы координат относительно местной системы координат (рисунок 3.3), а также их средние квадратические погрешности.

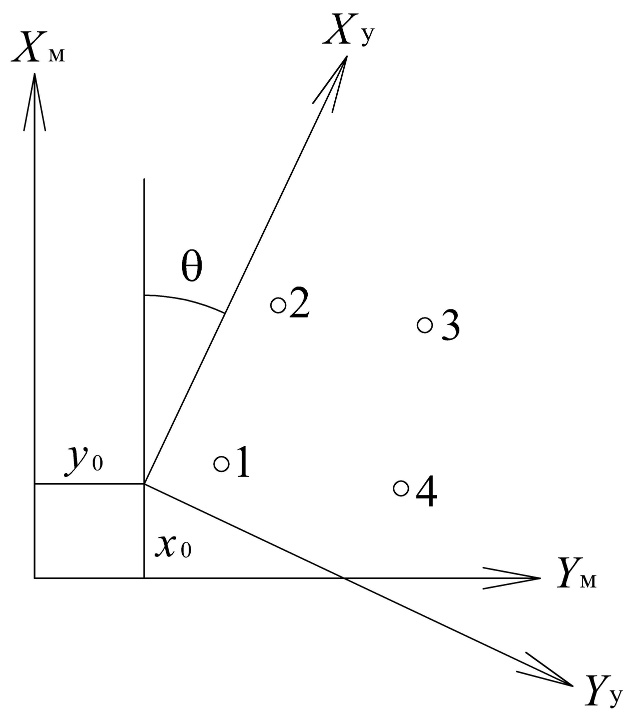

Рисунок 3.3 – Системы местных и городских координат

<u>Исходные данные:</u>

$$x_м^{(1)} = 147{,}211\,м;\ y_м^{(1)} = 316{,}290\,м;$$
$$x_у^{(1)} = 137{,}473\,м;\ y_у^{(1)} = 165{,}026\,м;$$
$$x_м^{(2)} = 576{,}271\,м;\ y_м^{(2)} = 469{,}704\,м;$$
$$x_у^{(2)} = 590{,}907\,м;\ y_у^{(2)} = 120{,}313\,м;$$
$$x_м^{(3)} = 522{,}576\,м;\ y_м^{(3)} = 864{,}747\,м;$$
$$x_у^{(3)} = 711{,}248\,м;\ y_у^{(3)} = 500{,}402\,м;$$
$$x_м^{(4)} = 81{,}664\,м;\ y_м^{(4)} = 800{,}302\,м;$$
$$x_у^{(4)} = 285{,}098\,м;\ y_у^{(4)} = 630{,}589\,м.$$

Определения координат в условной системе равноточные. Погрешности координат в местной системе координат пренебрегаемо малы по сравнению с координатами в условной системе.

<u>Решение.</u>

Измеренными величинами являются координаты опорных точек в условной системе координат. Координаты в местной системе координат не следует рассматривать как измеренные величины, ибо они определены намного точнее, чем координаты в местной системе. Весовая матрица вектора измеренных величин $P = E$. Под параметрами преобразования систем координат будем понимать координаты x_0, y_0 начала условной системы координат в местной системе и угол θ разворота осей условной системы координат относительно местной.

Связь между плановыми координатами в местной $x_{\text{м}}$, $y_{\text{м}}$ и условной $x_{\text{у}}$, $y_{\text{у}}$ системах координат выражается известными формулами аналитической геометрии

$$x_{\text{у}} = \sin\theta(y_{\text{м}} - y_0) + \cos\theta(x_{\text{м}} - x_0);$$
$$y_{\text{у}} = \cos\theta(y_{\text{м}} - y_0) - \sin\theta(x_{\text{м}} - x_0).$$

Величины x_0, y_0, θ являются элементами ориентирования и подлежат определению.

Так как количество определяемых величин ($k = 3$) меньше числа измерений ($n = 8$), задачу следует решать по методу наименьших квадратов.

Принимая в качестве параметров элементы ориентирования $t_1 = x_0$, $t_2 = y_0$, $t_3 = \theta$, составим параметрические уравнения связи

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \sin t_3(y_{\text{м}}^{(1)} - t_2) + \cos t_3(x_{\text{м}}^{(1)} - t_1) - x_{\text{у}}^{(1)};\\
\varphi_2 &= \cos t_3(y_{\text{м}}^{(1)} - t_2) - \sin t_3(x_{\text{м}}^{(1)} - t_1) - y_{\text{у}}^{(1)};\\
\varphi_3 &= \sin t_3(y_{\text{м}}^{(2)} - t_2) + \cos t_3(x_{\text{м}}^{(2)} - t_1) - x_{\text{у}}^{(2)};\\
\varphi_4 &= \cos t_3(y_{\text{м}}^{(2)} - t_2) - \sin t_3(x_{\text{м}}^{(2)} - t_1) - y_{\text{у}}^{(2)};\\
\varphi_5 &= \sin t_3(y_{\text{м}}^{(3)} - t_2) + \cos t_3(x_{\text{м}}^{(3)} - t_1) - x_{\text{у}}^{(3)};\\
\varphi_6 &= \cos t_3(y_{\text{м}}^{(3)} - t_2) - \sin t_3(x_{\text{м}}^{(3)} - t_1) - y_{\text{у}}^{(3)};\\
\varphi_7 &= \sin t_3(y_{\text{м}}^{(4)} - t_2) + \cos t_3(x_{\text{м}}^{(4)} - t_1) - x_{\text{у}}^{(4)};\\
\varphi_8 &= \cos t_3(y_{\text{м}}^{(4)} - t_2) - \sin t_3(x_{\text{м}}^{(4)} - t_1) - y_{\text{у}}^{(4)}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Приближенные значения параметров найдем по двум опорным точкам. Для этого вычтем из первого уравнения третье и из второго – четвертое. Получим систему из двух уравнений.

$$\left.\begin{aligned}
&(y_{\text{м}}^{(1)} - y_{\text{м}}^{(2)})\sin t_3 + (x_{\text{м}}^{(1)} - x_{\text{м}}^{(2)})\cos t_3 - (x_{\text{у}}^{(1)} - x_{\text{у}}^{(2)}) = 0;\\
&(y_{\text{м}}^{(1)} - y_{\text{м}}^{(2)})\cos t_3 - (x_{\text{м}}^{(1)} - x_{\text{м}}^{(2)})\sin t_3 + -(y_{\text{у}}^{(1)} - y_{\text{у}}^{(2)}) = 0,
\end{aligned}\right\}$$

которую запишем

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta y_{\text{м}} \sin t_3 + \Delta x_{\text{м}} \cos t_3 - \Delta x_{\text{у}} = 0;\\
&\Delta y_{\text{м}} \cos t_3 - \Delta x_{\text{м}} \cos t_3 - \Delta y_{\text{у}} = 0,
\end{aligned}\right\}$$

где $\Delta x_{\text{м}}, \Delta y_{\text{м}}$ - разности координат опорных точек в местной системе; $\Delta x_{\text{у}}, \Delta y_{\text{у}}$ - разности координат опорных точек в условной системе.

Решая ее найдем t_3^0

$$t_3^0 = \arccos\left(\frac{\Delta y_{\text{у}} \Delta y_{\text{м}} + \Delta x_{\text{у}} \Delta x_{\text{м}}}{\Delta x_{\text{м}}^2 + \Delta y_{\text{м}}^2}\right).$$

Приближенные значения t_1^0, t_2^0 найдем из первых двух уравнений системы (3.5).

Получим

$$t_1^0 = -x_{\text{у}}^{(1)} \cos t_3 + y_{\text{у}}^{(1)} \sin t_3 + x_{\text{м}}^{(1)};$$

$$t_2^0 = -x_{\text{у}}^{(1)} \sin t_3 - y_{\text{у}}^{(1)} \cos t_3 + y_{\text{м}}^{(1)}.$$

Для условий рассматриваемой задачи будем иметь следующий вектор приближенных значений параметров.

$$t^0 = \begin{bmatrix} t_1^0 \\ t_2^0 \\ t_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93{,}445\,\text{м} \\ 108{,}344\,\text{м} \\ 25^\circ 17' 56'' \end{bmatrix}.$$

Для образования матрицы B возьмем частные производные от функций (3.5) по выбранным параметрам. Будем иметь

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}\right)_0 = -\cos\varphi; \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2}\right)_0 = -\sin\varphi;$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_3}\right)_0 = \cos t_3^0 (y_{\text{м}}^{(1)} - t_2^0) - \sin t_3^0 (x_{\text{м}}^{(1)} - t_1^0);$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}\right)_0 = \sin\varphi; \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2}\right)_0 = -\cos\varphi;$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_3}\right)_0 = -\sin t_3^0 (y_{\text{м}}^{(1)} - t_2^0) - \cos t_3^0 (x_{\text{м}}^{(1)} - t_1^0);$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial t_1}\right)_0 = -\cos\varphi; \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial t_2}\right)_0 = -\sin\varphi;$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial t_3}\right)_0 = \cos t_3^0 (y_{\text{м}}^{(2)} - t_2^0) - \sin t_3^0 (x_{\text{м}}^{(2)} - t_1^0);$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_4}{\partial t_1}\right)_0 = \sin\varphi\,;\ \left(\frac{\partial\varphi_4}{\partial t_2}\right)_0 = -\cos\varphi\,;$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_4}{\partial t_3}\right)_0 = -\sin t_3^0(y_{\text{м}}^{(2)} - t_2^0) - \cos t_3^0(x_{\text{м}}^{(2)} - t_1^0)\,;$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_5}{\partial t_1}\right)_0 = -\cos\varphi\,;\ \left(\frac{\partial\varphi_5}{\partial t_2}\right)_0 = -\sin\varphi\,;$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_5}{\partial t_3}\right)_0 = \cos t_3^0(y_{\text{м}}^{(3)} - t_2^0) - \sin t_3^0(x_{\text{м}}^{(3)} - t_1^0)\,;$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_6}{\partial t_1}\right)_0 = \sin\varphi\,;\ \left(\frac{\partial\varphi_6}{\partial t_2}\right)_0 = -\cos\varphi\,;$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_6}{\partial t_3}\right)_0 = -\sin t_3^0(y_{\text{м}}^{(3)} - t_2^0) - \cos t_3^0(x_{\text{м}}^{(3)} - t_1^0)\,;$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_7}{\partial t_1}\right)_0 = -\cos\varphi\,;\ \left(\frac{\partial\varphi_7}{\partial t_2}\right)_0 = -\sin\varphi\,;$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_5}{\partial t_3}\right)_0 = \cos t_3^0(y_{\text{м}}^{(4)} - t_2^0) - \sin t_3^0(x_{\text{м}}^{(4)} - t_1^0)\,;$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_8}{\partial t_1}\right)_0 = \sin\varphi\,;\ \left(\frac{\partial\varphi_8}{\partial t_2}\right)_0 = -\cos\varphi\,;$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_8}{\partial t_3}\right)_0 = -\sin t_3^0(y_{\text{м}}^{(4)} - t_2^0) - \cos t_3^0(x_{\text{м}}^{(4)} - t_1^0)\,.$$

Учтем, что параметр t_3 выражен в угловой величине. Для того чтобы получить поправку к его приближенному значению в угловой величине, например, в секундах, необходимо значения частных производных $\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_3}\right)_0$ разделить на $\rho = 206265''$.

В результате будем иметь

$$B = \begin{bmatrix} -0{,}9041 & -0{,}4273 & 0{,}8001 \\ 0{,}4273 & -0{,}9041 & -0{,}6665 \\ -0{,}9041 & -0{,}4273 & 0{,}5836 \\ 0{,}4273 & -0{,}9041 & -2{,}8650 \\ -0{,}9041 & -0{,}4273 & -2{,}4264 \\ 0{,}4273 & -0{,}9041 & -3{,}4481 \\ -0{,}9041 & -0{,}4273 & -3{,}0574 \\ 0{,}4273 & -0{,}9041 & -1{,}3820 \end{bmatrix}.$$

Значения свободных членов уравнений поправок получим, подставив в исходные параметрические уравнения связи (3.5) приближенные значения параметров и результаты измерений. Например, l_1 будет равен

$$l_1 = \sin t_3^0 (y_{\text{м}}^{(1)} - t_2^0) + \cos t_3^0 (x_{\text{м}}^{(1)} - t_1^0) - x_{\text{у}}^{(1)}.$$

В результате будем иметь

$$L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 35 \\ 59 \\ -33 \\ 71 \\ -48 \\ 39 \end{bmatrix} \text{мм.}$$

В дальнейшем будем использовать стандартную процедуру уравнивания. Получим

$$N = B^T B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -9{,}7819 \\ 0 & 4 & 4{,}6248 \\ 9{,}7819 & 4{,}6248 & 38{,}6665 \end{bmatrix};$$

$$\lambda = B^T L = \begin{bmatrix} 113{,}4150 \\ 132{,}4448 \\ 672{,}1820 \end{bmatrix};$$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 0,8864 & 0,3009 & 0,2602 \\ -0,3009 & 0,3922 & -0,1230 \\ 0,2602 & -0,1230 & 0,1064 \end{bmatrix};$$

$$\tau = -N^{-1}\lambda = \begin{bmatrix} 34,5\,\text{мм} \\ 3,4\,\text{мм} \\ 25,7'' \end{bmatrix}.$$

Тогда уравненные значения элементов ориентирования будут

$$t = t^0 + \tau = \begin{bmatrix} 93,480\,\text{м} \\ 108,347\,\text{м} \\ 25^{\circ}18'22'' \end{bmatrix}.$$

Вычислим вектор V по формуле $V = B\tau + L$. Получим

$$V = \begin{bmatrix} -12,1 \\ -5,4 \\ 17,6 \\ -3,2 \\ -3,6 \\ -6,3 \\ -1,9 \\ 14,9 \end{bmatrix}\text{мм}.$$

Тогда уравненные значения координат опорных точек в условной системе будут

$$X' = X + V = \begin{bmatrix} 137,461 \\ 165,021 \\ 590,925 \\ 120,310 \\ 711,244 \\ 500,396 \\ 285,096 \\ 630,604 \end{bmatrix}\text{м}.$$

Подставляя уравненные значения t_j и x'_i в исходные уравнения связи (3.5), подтверждаем правильность уравнительных вычислений.

Значение $[v^2]$ вычислим по формуле (2.4), при этом учтем равноточность измерений. Получим $[v^2] = 774$.

Средняя квадратическая погрешность одного результата измерения будет

$$m_x = \sqrt{[v^2]/(n-k)} = \sqrt{774/(8-3)} = 12{,}4 \text{ мм}.$$

Используя m_x и диагональные элементы матрицы N^{-1}, вычислим средние квадратические погрешности уравненных элементов ориентирования. Получим

$$m_{x_0} = m\sqrt{Q_{t_{11}}} = 12{,}4\sqrt{0{,}886} = 11{,}7 \text{ мм};$$

$$m_{y_0} = m\sqrt{Q_{t_{22}}} = 12{,}4\sqrt{0{,}392} = 7{,}8 \text{ мм};$$

$$m_{\theta} = m\sqrt{Q_{t_{33}}} = 12{,}4\sqrt{0{,}106} = 4{,}0''.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Большаков, В.Д. Уравнивание геодезических построений / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе, В.В. Голубев. – М.: Недра, 1989. – 413 с.

2. Брынь М.Я. Уравнивание фотограмметрических измерений параметрическим способом / М.Я Брынь, А.В. Астапович – СПб: СПВВТКУ, 1997. – 60 с.

3. Гудков, В.М. Математическая обработка маркшейдерско-геодезических измерений / В.М. Гудков, А.В. Хлебников. – М.: Недра, 1990. – 335 с.

4. Кузьмин, И.И. Теория математической обработки геодезических измерений / И.И. Кузьмин, Г.А. Сергеев.– М.: Военное издательство, 1987. – 271с.

5. Маркузе Ю. И. Теория математической обработки геодезических измерений / Ю.И. Маркузе, В.В. Голубев. – М.: Академический проект; Альма Матер, 2010. – 247 с.

5. Машимов, М.М. Методы математической обработки астрономо-геодезических измерений / М.М. Машимов. – М.: ВИА, 1990. – 510 с.