

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

---

Кафедра «Информатика и информационная безопасность»

**Е.В. Рунёв**

**Конспект лекций**  
*по дисциплине*  
**«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.24)**

для специальности  
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации  
«Информационная безопасность автоматизированных систем на  
транспорте»

Форма обучения – очная

## **РАЗДЕЛ 8. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА**

## ТЕМА 1.

Линейное пространство: определение, следствия из аксиом.

Примеры линейных пространств.

Изоморфизм линейных пространств.

Примеры изоморфных линейных пространств.

Линейная зависимость (ЛЗ) и линейная независимость (ЛНЗ) векторов.

Свойства ЛЗ и ЛНЗ наборов векторов.

Базис и размерность линейного пространства.

Координаты вектора в линейном пространстве.

Единственность разложения по базису.

### Линейные пространства.

Из курса векторной алгебры известно, что свободные векторы на плоскости (и в пространстве) можно складывать и умножать на вещественные числа, причём эти операции обладают определёнными свойствами.

Многочлены с вещественными (комплексными) коэффициентами также можно складывать и умножать на вещественные (комплексные) числа, причём и эти операции обладают аналогичными свойствами.

В этой главе мы будем изучать множества элементов произвольной природы, для которых определены операции сложения и умножения на числа, причём эти операции обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над свободными векторами.

Такие множества обладают рядом общих свойств и называются линейными пространствами.

### Понятие линейного пространства.

#### 1. Определение поля.

**Поле** будем называть множество  $\mathbf{K}$  элементов произвольной природы, для которого выполнены следующие три требования:

I. На множестве  $\mathbf{K}$  определена операция сложения, т.е. имеется правило, с помощью которого любой упорядоченной паре  $(\alpha, \beta)$  элементов этого множества ставится в соответствие **единственный** элемент  $\gamma$  этого множества, называемый их суммой, который будем обозначать так:  $\gamma = \alpha + \beta$ .

II. На множестве  $\mathbf{K}$  определена операция умножения, т.е. имеется правило, с помощью которого любой упорядоченной паре  $(\lambda, \mu)$  элементов этого множества ставится в соответствие **единственный** элемент  $\omega$  этого множества, называемый их произведением, который будем обозначать так:  $\omega = \lambda \cdot \mu$ .

III. Эти операции подчиняются следующим 9 аксиомам:

**1. Коммутативность сложения.** Для любых элементов  $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$  справедливо равенство:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

**2. Ассоциативность сложения.** Для любых элементов  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$  справедливо равенство:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

**3. Существование нулевого элемента.** Среди элементов множества  $\mathbf{K}$  существует элемент, обозначаемый так:  $0$  и называемый нулевым, такой, что для любого элемента  $\alpha \in \mathbf{K}$  справедливо равенство:

$$\alpha + 0 = \alpha$$

**4. Существование противоположного элемента.** Для любого элемента  $\alpha \in \mathbf{K}$  существует элемент множества  $\mathbf{K}$ , обозначаемый так:  $-\alpha$  и называемый противоположным к  $\alpha$ , и такой, что справедливо равенство:

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

**5. Коммутативность умножения.** Для любых элементов  $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$  справедливо равенство:

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

**6. Ассоциативность умножения.** Для любых элементов  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$  справедливо равенство:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

**7. Дистрибутивность.** Для любых элементов  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$  справедливо равенство:

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$$

**8. Существование единицы.** Среди элементов множества  $\mathbf{K}$  существует элемент, обозначаемый так: 1 и называемый единицей, такой, что для любого элемента  $\alpha \in \mathbf{K}$  справедливо равенство:

$$\alpha \cdot 1 = \alpha$$

**9. Существование обратного элемента.** Для любого элемента  $\alpha \in \mathbf{K}$ , не равного нулевому, существует элемент, обозначаемый так:  $\alpha^{-1}$  и называемый обратным к  $\alpha$ , и такой, что справедливо равенство:

$$\alpha \cdot (\alpha^{-1}) = 1$$

**Замечание 1.** Элементы поля в дальнейшем будем называть числами.

**Пример 1.** Множество вещественных чисел  $\mathbf{R}$ , очевидно, является полем.

**Пример 2.** Множество комплексных чисел  $\mathbf{C}$ , очевидно, является полем.

**Пример 3.** Множество рациональных чисел  $\mathbf{Q}$ , очевидно, является полем.

Напомним, что рациональное число - это такое, которое можно представить в виде  $\frac{m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  - целые числа.

**Пример 4.** Множество  $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbf{Q}\}$  также является полем. Докажите это утверждение.

**Пример 5.** Множество  $\mathbf{Z}$ , состоящее из всех целых чисел, не является полем, т.к. не выполняется аксиома 9.

Например, для числа 2 нет обратного, т.е. такого **целого** числа  $\alpha$ , чтобы выполнялось равенство  $2 \cdot \alpha = 1$ .

**Пример 6.** Множество  $\mathbf{K}_1$  всех квадратных матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ , где  $a, b \in \mathbf{R}$  является полем.

На этом множестве определены операции сложения и умножения. Очевидно,

нулевым элементом является нулевая матрица  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , которая принадлежит  $\mathbf{K}_1$ .

Единичная матрица  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , которая также принадлежит  $\mathbf{K}_1$ , исполняет

роль единицы. Действительно, ранее было доказано, что для любой квадратной матрицы  $A$  второго порядка справедливы равенства  $A + O = A$  и  $A \cdot E = A$ . В частности, эти равенства выполняются и для матриц из множества  $\mathbf{K}_1$ . Кроме

того, для любой матрицы  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  противоположной служит матрица

$-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \in \mathbf{K}_1$ . Следовательно, аксиома 4 также выполнена. Остальные

аксиомы, за исключением 5-ой, и 9-ой выполняются для всех квадратных матриц второго порядка, в частности, эти аксиомы выполняются и для матриц из множества  $\mathbf{K}_1$ .

Покажем, что на множестве  $\mathbf{K}_1$  умножение коммутативно. Вычислим

$$A \cdot A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a_1 - b \cdot b_1 & a \cdot b_1 + b \cdot a_1 \\ -b \cdot a_1 - a \cdot b_1 & -b \cdot b_1 + a \cdot a_1 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$A_1 \cdot A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a - b_1 \cdot b & a_1 \cdot b + b_1 \cdot a \\ -b_1 \cdot a - a_1 \cdot b & -b \cdot b_1 + a \cdot a_1 \end{pmatrix} = A \cdot A_1 \text{ для}$$

любых матриц  $A, A_1 \in \mathbf{K}_1$ .

Покажем, что для любой ненулевой матрицы  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{K}_1$  существует

обратная матрица, принадлежащая  $\mathbf{K}_1$ . Действительно, матрица

$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{K}_1$ . Таким образом, множество  $\mathbf{K}_1$  относительно обычных

операций сложения и умножения матриц является полем.

**Пример 7.** Пусть множество  $\mathbf{Z}_2$  состоит из двух элементов, которые будем обозначать так: 1 и 0.

Операцию сложения на этом множестве зададим так:

$$0+0=0; \quad 0+1=1; \quad 1+0=1; \quad 1+1=0.$$

Операцию умножения на этом множестве зададим так:

$$0 \cdot 0 = 0; \quad 0 \cdot 1 = 0; \quad 1 \cdot 0 = 0; \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Легко проверить, что множество  $\mathbf{Z}_2$  является полем, которое называют полем из двух элементов. Заметим, что существуют и другие поля, содержащие конечное число элементов.

**Замечание 2.** Для матриц одинакового строения с элементами из поля  $\mathbf{K}$  определена операция сложения (см. глава III§2).

**Замечание 3.** Для матриц с элементами из поля  $\mathbf{K}$  определена операция умножения на числа, т.е. элементы поля  $\mathbf{K}$ . Для этих операций сложения матриц и умножения их на числа поля  $\mathbf{K}$  справедливы 8 свойств (см. глава III§2).

**Замечание 4.** Для матриц с элементами из поля  $\mathbf{K}$  согласованного строения определена операция умножения, причём эта операция удовлетворяет 6 свойствам (см. глава III§3).

Справедливость этих утверждений предлагается проверить самостоятельно в качестве упражнения. В дальнейшем мы будем пользоваться этими утверждениями.

## 2. Определение линейного пространства.

Множество  $\mathcal{X}$  элементов произвольной природы будем называть **линейным пространством над полем**

**$\mathbf{K}$** , если для него выполнены следующие три требования:

I. На множестве  $\mathcal{X}$  определена операция сложения, т.е. имеется правило, с помощью которого любой упорядоченной паре  $(\bar{x}, \bar{y})$  элементов этого множества ставится в соответствие **единственный** элемент  $\bar{z}$  этого множества, называемый их суммой, который будем обозначать так:  $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$ .

II. На множестве  $\mathcal{X}$  определена операция умножения на числа, т.е. на элементы поля  **$\mathbf{K}$** . Это означает, что имеется правило, с помощью которого любому числу  $\lambda \in \mathbf{K}$  и любому элементу  $\bar{x} \in \mathcal{X}$  ставится в соответствие **единственный** элемент  $\bar{v}$  множества  $\mathcal{X}$ , называемый их произведением, который будем обозначать так:  $\bar{v} = \lambda \cdot \bar{x}$  или так:  $\bar{v} = \bar{x} \cdot \lambda$ .

III. Эти операции подчиняются следующим 8 аксиомам:

**1. Коммутативность сложения.** Для любых элементов  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$ , справедливо равенство:

$$\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$$

**2. Ассоциативность сложения.** Для любых элементов  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathcal{X}$ , справедливо равенство:

$$(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$$

**3. Существование нулевого элемента.** Среди элементов множества  $\mathcal{X}$  существует элемент, обозначаемый так:  $\bar{0}$  и называемый нулевым, такой, что для любого элемента  $\bar{x} \in \mathcal{X}$ , справедливо равенство:

$$\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$$

**4. Существование противоположного элемента.** Для любого элемента  $\bar{x} \in \mathcal{X}$ , существует элемент множества  $\mathcal{X}$ , обозначаемый так:  $\bar{x}'$  и называемый противоположным к  $\bar{x}$ , и такой, что справедливо равенство:

$$\bar{x} + \bar{x}' = \bar{0}$$

**5.** Для любого элемента  $\bar{x} \in \mathcal{X}$ , справедливо равенство:

$$1 \cdot \bar{x} = \bar{x}, \text{ где } 1 - \text{ единица поля } \mathbf{K}.$$

**6. Дистрибутивность относительно сложения векторов.** Для любых элементов  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$ , и для любого числа  $\alpha \in \mathbf{K}$  справедливо равенство:

$$\alpha \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \cdot \bar{x} + \alpha \cdot \bar{y}$$

**7. Дистрибутивность относительно сложения чисел.** Для любых чисел  $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$  и для любого элемента  $\bar{x} \in \mathcal{X}$  справедливо равенство:

$$(\alpha + \beta) \cdot \bar{x} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{x}$$

**8.** Для любых чисел  $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$  и для любого элемента  $\vec{x} \in \mathcal{X}$  справедливо равенство:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x})$$

**Замечание 1.** Линейное пространство над полем  $\mathbf{K}$  называют также векторным пространством над полем  $\mathbf{K}$ .

Если по смыслу ясно, о каком поле идёт речь, или неважно каково поле  $\mathbf{K}$ , то иногда  $\mathcal{X}$  будем называть просто линейным пространством.

**Замечание 2.** Элементы линейного пространства будем, как правило, обозначать маленькими буквами латинского алфавита, снабжёнными сверху стрелкой, и называть векторами. Элементы поля  $\mathbf{K}$ , т.е. числа, будем обозначать греческими буквами. Разумеется, будут и отступления от этих договорённостей.

**Пример 1.** Из курса векторной алгебры известно, что множества  $V_2$  и  $V_3$  свободных векторов на плоскости и в пространстве соответственно, являются линейными пространствами над полем вещественных чисел относительно имеющих там операций сложения и умножения на вещественное число.

**Пример 2.** Из свойств действий над матрицами следует, что  $\mathcal{X} = M_m(\mathbf{K})$  является линейным пространством над полем  $\mathbf{K}$  относительно имеющих там операций сложения и умножения на числа поля  $\mathbf{K}$ . В частности, множества  $\mathbf{K}^n$ ,  $\mathbf{K}_n$ ,  $M_n(\mathbf{K})$  являются линейными пространствами над полем  $\mathbf{K}$  относительно имеющих там операций сложения и умножения на числа поля  $\mathbf{K}$ .

**Пример 3.** Множество  $\mathcal{X} = \mathbf{R}[t]$  всех многочленов от буквы  $t$  с вещественными коэффициентами является вещественным линейным пространством (или линейным пространством над полем  $\mathbf{R}$ ).

**Пример 4.** Множество  $\mathcal{X} = C([a, b])$  непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций является вещественным линейным пространством, если сложение и умножение на вещественные числа определить так:

$$(f + g)(x) \stackrel{def}{=} f(x) + g(x) \text{ для любого } x \in [a, b];$$

$$(\lambda \cdot f)(x) \stackrel{def}{=} \lambda \cdot f(x) \text{ для любого } x \in [a, b] \text{ и любого } \lambda \in \mathbf{R}.$$

**Пример 5.** Множество  $\mathcal{X} = \mathbf{R}_n[t]$  всех многочленов от буквы  $t$  с вещественными коэффициентами степени не превосходящей  $n$ , является вещественным линейным пространством (или линейным пространством над полем  $\mathbf{R}$ ).

**Замечание 3.** Определение умножения матриц будем использовать и в случае, когда их строение согласовано известным образом (см. глава III§3), причём элементами одной матрицы являются векторы линейного пространства  $\mathcal{X}$  над полем  $\mathbf{K}$ , а элементами другой матрицы – числа, т.е. элементы поля  $\mathbf{K}$ .

В качестве упражнения предлагается доказать, что и в этом случае для умножения матриц справедливы 6 свойств (см. глава III§3).

### 3. Некоторые свойства линейных пространств.

**Теорема 1.** В любом линейном пространстве нулевой вектор единственный.

**Доказательство.** Пусть  $\vec{0}_1, \vec{0}_2 \in \mathcal{X}$ , причём для любых векторов  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{X}$ , справедливы равенства

$\vec{x} = \vec{x} + \vec{0}_1$  и  $\vec{y} = \vec{y} + \vec{0}_2$ , т.е. и вектор  $\vec{0}_1$ , и вектор  $\vec{0}_2$  являются нулевыми векторами пространства  $\mathcal{X}$ . Отсюда получаем:  $\vec{0}_1 = \vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_2 + \vec{0}_1 = \vec{0}_2$ . Здесь мы воспользовались коммутативностью сложения, а также приведёнными равенствами, положив  $\vec{y} = \vec{0}_1$ ;  $\vec{x} = \vec{0}_2$ . Теорема доказана.

**Теорема 2.** Для любого вектора  $\vec{x}$  линейного пространства  $\mathcal{X}$  противоположный к нему вектор единственный.

**Доказательство.** Пусть  $\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'' \in \mathcal{X}$ , причём  $\vec{x} + \vec{x}' = \vec{0}$  и  $\vec{x} + \vec{x}'' = \vec{0}$ . Отсюда следует, что

$$\vec{x}'' = \vec{x}'' + \vec{0} = \vec{x}'' + (\vec{x} + \vec{x}') = (\vec{x}'' + \vec{x}) + \vec{x}' = \vec{0} + \vec{x}' = \vec{x}'. \text{ Здесь мы}$$

воспользовались, кроме приведённых равенств ещё 2-ой и 3-ей аксиомами. Теорема доказана.

**Теорема 3.** Для любого вектора  $\vec{x}$  линейного пространства  $\mathcal{X}$  справедливо равенство  $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$ .

**Доказательство.** Воспользуемся аксиомой 7:  $0 \cdot \vec{x} = (0 + 0) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}$ . Пусть  $\vec{x}''$  - вектор, противоположный к вектору  $0 \cdot \vec{x}$ , т.е.  $0 \cdot \vec{x} + \vec{x}'' = \vec{0}$ . Используем полученное равенство

$0 \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}$ . В результате получим:  $\vec{0} = \vec{x}'' + 0 \cdot \vec{x} = \vec{x}'' + (0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}) = (\vec{x}'' + 0 \cdot \vec{x}) + 0 \cdot \vec{x} = \vec{0} + 0 \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} \Leftrightarrow 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$ . Здесь мы воспользовались аксиомами 1, 2 и 3.

Теорема доказана.

**Теорема 4.** Вектор, противоположный к вектору  $\vec{x}$  линейного пространства  $\mathcal{X}$ , равен вектору  $(-1) \cdot \vec{x}$ .

**Доказательство.** Действительно, вектор  $(-1) \cdot \vec{x}$  удовлетворяет аксиоме 4:

$\vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = [1 + (-1)] \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$ . Здесь мы воспользовались аксиомами 5, 7 и теоремой 3. Из теоремы 2 следует, что вектор, противоположный к вектору  $\vec{x}$ , равен  $(-1) \cdot \vec{x}$ . Теорема доказана.

**Замечание.** В дальнейшем вектор, противоположный к вектору  $\vec{x}$ , будем обозначать так:  $-\vec{x}$ .

**Задача 1.** Докажите, что если  $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$ , то или  $\lambda = 0$ , или  $\vec{x} = \vec{0}$ .

**Задача 2.** Докажите, что  $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$  для любого числа  $\lambda \in \mathbf{K}$ .

## §2 Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов.

**Определение 1.** Пусть  $\mathcal{X}$  - линейное пространство над полем  $\mathbf{K}$ ,  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{X}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{K}$ . Выражение вида  $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m$  будем называть **линейной комбинацией** векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$  с **коэффициентами**  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ .

Запись:  $\vec{x} = \text{ЛК}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$  будет означать, что вектор  $\vec{x}$  является линейной комбинацией векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$ .

**Замечание.** Очевидно, линейная комбинация линейных комбинаций векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$  также является

линейной комбинацией этих векторов, т.к.

$$\begin{aligned} \beta_1(\lambda_{11}\vec{x}_1 + \dots + \lambda_{1m}\vec{x}_m) + \dots + \beta_s(\lambda_{s1}\vec{x}_1 + \dots + \lambda_{sm}\vec{x}_m) = \\ = (\beta_1 \cdot \lambda_{11} + \dots + \beta_s \cdot \lambda_{s1})\vec{x}_1 + \dots + (\beta_1 \cdot \lambda_{1m} + \dots + \beta_s \cdot \lambda_{sm})\vec{x}_m. \end{aligned}$$

Какими аксиомами линейного пространства мы здесь воспользовались?

**Определение 2.** Пусть  $\mathcal{X}$  - линейное пространство над полем  $\mathbf{K}$ . Множество всех линейных комбинаций векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{X}$  будем называть **линейной оболочкой, натянутой на векторы**  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$  и обозначать так:  $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \rangle$ . Таким образом,

$$\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{ \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m; \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{K} \}.$$

Очевидно,  $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \rangle \subseteq \mathcal{X}$ .

**Определение 3.** Совокупность векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{X}$  будем называть **линейно зависимой**, если существуют числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{K}$ , не равные нулю одновременно и такие, что  $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m = \vec{0}$ .

В противном случае совокупность  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$  будем называть **линейно независимой**.

Таким образом, одна и та же совокупность векторов не может быть одновременно и линейно зависимой, и линейно независимой.

Приведём ещё одно определение линейно независимой системы векторов, разумеется, равносильное предыдущему.

**Определение 4.** Совокупность векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{X}$  будем называть **линейно независимой**, если



из равенства нулевому вектору их линейной комбинации следует равенство нулю всех коэффициентов этой линейной комбинации, т.е. из равенства  $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m = \vec{0}$  следует, что  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ .

**Замечание.** Линейную комбинацию этих векторов можно записать используя определение умножения матриц:  $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m = \Lambda \cdot X$ , где  $\Lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_m)$ , а  $X = (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_m)^T$ . Тогда определение линейно независимой совокупности векторов  $X = (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_m)^T$  можно записать так:  $\Lambda \cdot X = \vec{0} \Rightarrow \Lambda = 0$ .

**Пример 1.** Пусть  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$ . Очевидно, справедливо равенство:  $2A_1 + A_2 - A_3 = O$ . Следовательно, совокупность матриц  $A_1, A_2, A_3$  линейно зависима по определению 3. В этом примере мы рассматриваем матрицы  $A_1, A_2, A_3$  как векторы вещественного линейного пространства  $M_2(\mathbf{R})$ .

**Пример 2.** Покажем, что совокупность векторов  $\vec{e}_1 = (1 \ 0 \dots 0)^T$ ,  $\vec{e}_2 = (0 \ 1 \dots 0)^T, \dots, \vec{e}_n = (0 \ 0 \dots 1)^T$  вещественного пространства  $\mathcal{X} = \mathbf{R}_n$  строк длины  $n$  линейно независимая.

Составим линейную комбинацию этих векторов и приравняем её к нулевому вектору:

$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0} \Leftrightarrow (\lambda_1 \ \lambda_2 \dots \lambda_n) = (0 \ 0 \dots 0)$ . Из определения равенства матриц отсюда следует, что  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ . Таким образом, по определению 4 эта совокупность линейно независимая.

**Пример 3.** Покажем, что совокупность матриц

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$  линейно независимая. Составим линейную

комбинацию этих матриц и приравняем её к нулевой матрице:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = O \Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = O \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 & 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 & 4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Легко подсчитать ранг матрицы этой системы:  $r \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$ . Следовательно, эта

система имеет единственное решение, т.е. нулевое (ранг матрицы системы равен числу неизвестных).

Итак, из равенства  $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = O$  следует, что  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Следовательно, по определению 4 эта совокупность матриц линейно независимая. В этом примере мы рассматриваем матрицы  $A_1, A_2, A_3$  как векторы вещественного линейного пространства  $M_2(\mathbf{R})$ .

**Пример 4.** Множество  $\mathcal{X} = \mathbf{C}_2$  комплексных строк длины 2 является вещественным линейным пространством, потому что такие строки можно складывать и умножать на вещественные числа, и при этом выполняются все 8 аксиом линейного пространства. Покажем, что совокупность строк

$\vec{x}_1 = (2+i \ 3-2i), \ \vec{x}_2 = (-1+2i \ 2+3i)$  этого пространства линейно независимая.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 = \vec{0} &\Leftrightarrow \lambda_1(2+i \ 3-2i) + \lambda_2(-1+2i \ 2+3i) = (0 \ 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2\lambda_1 + \lambda_1 i \ 3\lambda_1 - 2\lambda_1 i) + (-\lambda_2 + 2\lambda_2 i \ 2\lambda_2 + 3\lambda_2 i) = (0 \ 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [(2\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 + 2\lambda_2)i] \ [(3\lambda_1 + 2\lambda_2) + (-2\lambda_1 + 3\lambda_2)i] = (0 \ 0) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Пусть

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 + 2\lambda_2)i = 0 \\ (3\lambda_1 + 2\lambda_2) + (-2\lambda_1 + 3\lambda_2)i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

В этой выкладке важно, что числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественные, т.к.  $\mathcal{X}$  – вещественное пространство по условию.

**Пример 5.** Множество  $\mathcal{X}_1 = \mathbf{C}_2$  комплексных строк длины 2 является комплексным линейным пространством, потому что такие строки можно складывать и умножать на комплексные числа, и при этом выполняются все 8 аксиом линейного пространства. Заметим, что пространство  $\mathcal{X}$  из примера 4 и пространство  $\mathcal{X}_1$  различные, несмотря на то, что как множества они равны.

Покажем, что совокупность строк  $\vec{x}_1 = (2+i \ 3-2i), \ \vec{x}_2 = (-1+2i \ 2+3i)$  этого пространства линейно зависима. Действительно,

$$i \cdot \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = (2i-1 \ 3i+2) - (-1+2i \ 2+3i) = (0 \ 0) = \vec{0},$$

причём  $i \neq 0, -1 \neq 0$ .

В предыдущем примере мы не могли взять в качестве коэффициента число  $i$ , т.к. пространство  $\mathcal{X}$  является вещественным.

**Теорема 1.** Совокупность векторов линейного пространства, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

**Доказательство.** Пусть  $i$ -ый вектор в совокупности векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{X}$  нулевой, т.е.  $\vec{x}_i = \vec{0}$ . Тогда, очевидно, справедливо равенство

$$0 \cdot \vec{x}_1 + \dots + 1 \cdot \vec{x}_i + \dots + 0 \cdot \vec{x}_m = \vec{0}, \text{ причём } 1 - i\text{-ый коэффициент не равен } 0.$$

Таким образом, совокупность векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$  линейно зависима по определению 3.

**Теорема 2.** Если к линейно зависимой совокупности векторов линейного пространства добавить ещё несколько, то получившаяся совокупность будет также линейно зависима.

**Доказательство.** Пусть совокупность векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{X}$  линейного пространства над полем  $\mathbf{K}$  линейно зависима, т.е. существуют числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{K}$ , не равные нулю одновременно и такие, что  $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m = \vec{0}$ . Покажем, что тогда совокупность векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}, \dots, \vec{x}_{m+k} \in \mathcal{X}$  также линейно зависима.

Действительно, очевидно, справедливо равенство  $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m + 0 \cdot \vec{x}_{m+1} + \dots + 0 \cdot \vec{x}_{m+k} = \vec{0}$ , причём не все коэффициенты этой линейной комбинации равны 0, т.к. не все коэффициенты  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  равны нулю.

Следовательно, совокупность векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}, \dots, \vec{x}_{m+k}$  линейно зависима по определению 3.

**Теорема 3.** Если из линейно независимой совокупности векторов удалить несколько, то получившаяся совокупность будет также линейно независимой.

**Доказательство** проведём от противного с использованием теоремы 2. Пусть совокупность векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}, \dots, \vec{x}_{m+k} \in \mathcal{X}$  линейно независима, а совокупность  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$  линейно зависима.

Тогда по теореме 2 исходная совокупность векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}, \dots, \vec{x}_{m+k}$  будет также линейно зависима, что противоречит условию, и теорема доказана.

**Теорема 4. Критерий линейной зависимости.** Для того чтобы совокупность векторов линейного пространства была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы один из векторов этой совокупности был линейной комбинацией остальных.

**Доказательство.**

**Необходимость.** Пусть совокупность векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{X}$  линейного пространства над полем  $\mathbf{K}$  линейно зависима, т.е. существуют числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{K}$ , не равные нулю одновременно и такие, что  $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_i \vec{x}_i + \dots + \lambda_m \vec{x}_m = \vec{0}$ , и пусть для определённости  $\lambda_i \neq 0$  ( $1 \leq i \leq m$ ). Тогда из последнего равенства получаем:

$$\vec{x}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \vec{x}_1 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \vec{x}_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \vec{x}_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_m}{\lambda_i} \vec{x}_m, \text{ и необходимость}$$

доказана.

**Достаточность.** Пусть  $\vec{x}_i = \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_{i-1} \vec{x}_{i-1} + \alpha_{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + \alpha_m \vec{x}_m$ , ( $1 \leq i \leq m$ ). Тогда справедливо равенство:  $\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_{i-1} \vec{x}_{i-1} - 1 \cdot \vec{x}_i + \alpha_{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + \alpha_m \vec{x}_m = \vec{0}$ , причем  $-1 \neq 0$ .

Следовательно, совокупность векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$  линейно зависима по определению 3, и достаточность доказана.

**Теорема 5.** Если после добавления к линейно независимой совокупности векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$  линейного пространства  $\mathcal{X}$  над полем  $\mathbf{K}$  вектора  $\vec{x}_{m+1} \in \mathcal{X}$  новая совокупность  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}$  становится линейно зависимой, то добавленный вектор  $\vec{x}_{m+1}$  есть линейная комбинация элементов исходной совокупности, т.е.

$$\vec{x}_{m+1} = \text{ЛК}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m).$$

**Доказательство.** По условию совокупность  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}$  линейно зависима. Это означает, что существуют числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1} \in \mathbf{K}$ , не равные нулю одновременно и такие, что

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m + \lambda_{m+1} \vec{x}_{m+1} = \vec{0} \quad (1)$$

Покажем, что  $\lambda_{m+1} \neq 0$ . Пусть это не так, т.е.  $\lambda_{m+1} = 0$ . Из равенства (1) следует, что  $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m = \vec{0}$ , причём среди чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  есть ненулевые. Действительно,  $\lambda_{m+1} = 0$ , а  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$  не равны нулю одновременно. Из определения 3 следует, что совокупность  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$  линейно зависима, а это противоречит условию.

Таким образом, доказали, что  $\lambda_{m+1} \neq 0$ . Тогда из равенства (1) получаем:

$$\vec{x}_{m+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}} \vec{x}_1 - \dots - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} \vec{x}_m, \text{ и теорема 5 доказана.}$$

**Теорема 6. О линейной зависимости линейных комбинаций.**

Пусть даны векторы  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{X}$  линейного пространства над полем  $\mathbf{K}$  и пусть векторы  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k$  являются линейными комбинациями векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$ . Тогда если  $k > m$ , то совокупность  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k$  линейно зависима, т.е. если число линейных комбинаций больше числа комбинируемых векторов, то эти линейные комбинации линейно зависимы.

**Доказательство** проведём методом математической индукции по числу комбинируемых элементов,

т.е. по  $m$ .

**База математической индукции.** Пусть  $m = 1$ . Тогда по условию

$\vec{y}_1 = c_1 \vec{x}_1, \dots, \vec{y}_k = c_k \vec{x}_1$ . Если  $c_1 = 0$ , то  $\vec{y}_1 = \vec{0}$ , и совокупность  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k$  линейно

зависима по теореме 1. Если  $c_1 \neq 0$ , то  $\vec{y}_2 = c_2 \vec{x}_1 = \frac{c_2}{c_1} \cdot (c_1 \vec{x}_1) = \frac{c_2}{c_1} \vec{y}_1$ , и совокупность

$\vec{y}_1, \vec{y}_2$  линейно зависима по теореме 4, т.к.  $\vec{y}_2 = \text{ЛК}(\vec{y}_1)$ .

Следовательно, совокупность  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k$  линейно зависима по теореме 2, и база доказана.

**Индукционный переход.** Докажем, что утверждение теоремы справедливо для случая, когда число комбинируемых векторов равно  $m$ , если оно верно для случая, когда число комбинируемых векторов равно  $m - 1$ . Пусть

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= c_{11}\bar{x}_1 + c_{12}\bar{x}_2 + \dots + c_{1m}\bar{x}_m, \\ \bar{y}_2 &= c_{21}\bar{x}_1 + c_{22}\bar{x}_2 + \dots + c_{2m}\bar{x}_m, \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{y}_k &= c_{k1}\bar{x}_1 + c_{k2}\bar{x}_2 + \dots + c_{km}\bar{x}_m \end{aligned}$$

Если  $c_{1m} = c_{2m} = \dots = c_{km} = 0$ , то  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k$  являются линейными комбинациями  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1}$ , и, следовательно, совокупность  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k$  линейно зависима по индукционному предположению. Пусть теперь один из этих коэффициентов, например,  $c_{1m} \neq 0$  не равен нулю.

Рассмотрим теперь совокупность векторов  $\bar{z}_2, \dots, \bar{z}_k$  таких, что:

$$\begin{aligned} \bar{z}_2 &= \bar{y}_2 - \frac{c_{2m}}{c_{1m}} \bar{y}_1 = \left( c_{21} - \frac{c_{2m}}{c_{1m}} c_{11} \right) \bar{x}_1 + \left( c_{22} - \frac{c_{2m}}{c_{1m}} c_{12} \right) \bar{x}_2 + \dots + \left( c_{2(m-1)} - \frac{c_{2m}}{c_{1m}} c_{1(m-1)} \right) \bar{x}_{m-1} \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{z}_k &= \bar{y}_k - \frac{c_{km}}{c_{1m}} \bar{y}_1 = \left( c_{k1} - \frac{c_{km}}{c_{1m}} c_{11} \right) \bar{x}_1 + \left( c_{k2} - \frac{c_{km}}{c_{1m}} c_{12} \right) \bar{x}_2 + \dots + \left( c_{k(m-1)} - \frac{c_{km}}{c_{1m}} c_{1(m-1)} \right) \bar{x}_{m-1} \end{aligned}$$

Эта совокупность является линейно зависимой по индукционному предположению, т.к.  $\bar{z}_i = \text{ЛК}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1})$ ,  $2 \leq i \leq k$ , причём число линейных комбинаций  $k-1$  больше числа комбинируемых элементов  $m-1$ , т.к.  $k > m$ . Следовательно, существуют числа  $\lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbf{K}$ , не равные нулю одновременно и

$$\begin{aligned} \text{такие, что } \lambda_2 \bar{z}_2 + \dots + \lambda_k \bar{z}_k = \vec{0} &\Leftrightarrow \lambda_2 \left( \bar{y}_2 - \frac{c_{2m}}{c_{1m}} \bar{y}_1 \right) + \dots + \lambda_k \left( \bar{y}_k - \frac{c_{km}}{c_{1m}} \bar{y}_1 \right) = \vec{0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow - \left( \lambda_2 \frac{c_{2m}}{c_{1m}} + \dots + \lambda_k \frac{c_{km}}{c_{1m}} \right) \bar{y}_1 + \lambda_2 \bar{y}_2 + \dots + \lambda_k \bar{y}_k = \vec{0}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что совокупность  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k$  линейно зависима, т.к. коэффициенты  $\lambda_2, \dots, \lambda_k$  не равны нулю одновременно. В этом случае величина первого коэффициента не имеет значения, т.к. ненулевой коэффициент имеется среди последних  $k-1$  коэффициентов. Теорема 6 доказана.

### Конечномерные линейные пространства.

Пусть  $\mathcal{X}$  - линейное пространство над полем  $\mathbf{K}$ ,  $S$  - некоторая совокупность векторов из  $\mathcal{X}$ . Очевидно, линейная оболочка, натянутая на векторы из совокупности  $S$  является подмножеством линейного пространства  $\mathcal{X}$ , т.е.  $\langle S \rangle \subseteq \mathcal{X}$ .

**Определение 1.** Совокупность  $S$  векторов линейного пространства  $\mathcal{X}$  называется **порождающей** (или **полной**, или **системой образующих**) этого пространства, если каждый вектор этого пространства является линейной комбинацией векторов этой совокупности, т.е.

$$(S \text{ - порождающая совокупность линейного пространства } \mathcal{X}) \Leftrightarrow \langle S \rangle = \mathcal{X}.$$

**Определение 2.** Если в линейном пространстве  $\mathcal{X}$  существует **конечная** порождающая система векторов, то пространство  $\mathcal{X}$  называется **конечномерным**. В противном случае – **бесконечномерным**.

( $\mathcal{X}$  – конечномерное)  $\Leftrightarrow (\exists \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m \in \mathcal{X} : \mathcal{X} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m \rangle)$

**Замечание.** В конечномерном линейном пространстве не существует сколь угодно больших (по числу векторов) линейно независимых совокупностей векторов.

Пусть  $\mathcal{X} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m \rangle$ . Тогда любой вектор  $\bar{y} \in \mathcal{X}$  есть линейная комбинация векторов  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ .

Следовательно, по теореме 6 §2 любая совокупность векторов, содержащая более чем  $m$  векторов, будет линейно зависимой.

**Пример 1.** Покажем, что пространство  $\mathcal{X} = \mathbf{R}_n$  вещественных строк длины  $n$  является конечномерным вещественным пространством. Действительно, любая строка  $\bar{x}$  из этого пространства имеет вид:  $\bar{x} = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n)$ , где  $\alpha_i \in \mathbf{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Следовательно,  $\bar{x} = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n) = \alpha_1(1 \ 0 \ \dots \ 0) + \alpha_2(0 \ 1 \ \dots \ 0) + \dots + \alpha_n(0 \ 0 \ \dots \ 1) =$   
 $\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$ ,

т.е.  $\mathcal{X} = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n \rangle$ . (Обозначения из примера 2 §2).

**Пример 2.** Покажем, что пространство  $\mathcal{X} = M_2(\mathbf{C})$  квадратных комплексных матриц порядка 2 является конечномерным комплексным пространством. Любая квадратная комплексная матрица  $A$  порядка 2 имеет вид:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , где  $a_{ij} \in \mathbf{C}$ ,

$i, j = 1, 2$ . Следовательно,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , и

совокупность матриц  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  является

порождающей для пространства  $\mathcal{X} = M_2(\mathbf{C})$ . Следовательно,  $\mathcal{X} = M_2(\mathbf{C})$  – конечномерное комплексное пространство.

**Пример 3.** Покажем, что пространство всех многочленов с вещественными коэффициентами, т.е.

$\mathcal{X} = \mathbf{R}[t] = \{a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0, \ n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \ a_i \in \mathbf{R}, \ i = \overline{0, n}\}$  является

бесконечномерным вещественным пространством. Доказательство проведём от противного. Пусть в пространстве  $\mathcal{X}$  существует конечная порождающая система  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$ . Это означает, что любой многочлен  $f(t) \in \mathcal{X}$  имеет вид:

$f(t) = b_1 f_1(t) + b_2 f_2(t) + \dots + b_m f_m(t)$ , где  $b_i \in \mathbf{R}$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Тогда, очевидно,  $\deg f(t)$  – степень многочлена  $f(t)$  не превосходит наибольшей из степеней многочленов  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$ , т.е.

$\deg f(t) \leq \max(\deg f_1(t), \deg f_2(t), \dots, \deg f_m(t)) = k$ .

Таким образом, степень любого многочлена не превосходит числа  $k$ , что, конечно, неверно, т.к.  $\deg t^{k+1} = k + 1 > k$ . Следовательно, наше предположение неверно, и в пространстве  $\mathcal{X}$  не существует конечной порождающей системы. Таким образом,  $\mathcal{X}$  - бесконечномерное вещественное пространство.

**Пример 4.** Вещественное линейное пространство  $\mathcal{X} = C([a, b])$  непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций (пример 4 из §1) также является бесконечномерным линейным пространством.

**Теорема 1.** Все линейно независимые и порождающие системы векторов одного и того же конечномерного линейного пространства над полем  $\mathbf{K}$  содержат одинаковое количество векторов.

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{X} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m \rangle$  и  $\mathcal{X} = \langle \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k \rangle$ , причём совокупности векторов  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$  и  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k$  линейно независимые. Докажем от противного, что  $k = m$ . Пусть  $k < m$ . Любой вектор  $\bar{z}$  этого пространства есть линейная комбинация векторов совокупности  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k$ , т.к. она порождающая. В частности, каждый вектор  $\bar{x}_i = \text{ЛК}(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k)$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Число  $m$  линейных комбинаций векторов  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k$  больше числа комбинируемых. Следовательно, по теореме 6 §2 совокупность векторов  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$  линейно зависима, что противоречит её линейной независимости. Таким образом,  $k \geq m$ . Аналогично доказываем, что  $k \leq m$ , откуда и получаем равенство  $k = m$ .

**Определение 3.** Упорядоченная, линейно независимая и порождающая система векторов конечномерного линейного пространства  $\mathcal{X}$  над полем  $\mathbf{K}$  называется **базисом** этого пространства. Число векторов в базисе будем называть размерностью этого пространства и обозначать так:  $\dim \mathcal{X}$ .

Если мы хотим подчеркнуть, что  $\mathcal{X}$  - линейное пространство над полем  $\mathbf{K}$ , то его размерность будем обозначать ещё и так:  $\dim_{\mathbf{K}} \mathcal{X}$ .

Корректность этого определения следует из теоремы 1. Далее мы будем изучать только конечномерные линейные пространства.

**Пример 5.** В примере 2 §2 мы показали, что совокупность строк  $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ , где  $\bar{e}_1 = (1\ 0 \dots 0)$ ,  $\bar{e}_2 = (0\ 1 \dots 0)$ , ...,  $\bar{e}_n = (0\ 0 \dots 1)$ , линейно независимая, а в примере 1 §3 доказали, что эта совокупность порождающая для пространства  $\mathbf{R}_n$  - вещественных строк длины  $n$ . Следовательно,  $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$  - базис  $\mathbf{R}_n$  и  $\dim \mathbf{R}_n = n$ .

**Пример 6.** Докажите, что базисом пространства вещественных квадратных матриц второго порядка, т.е.

пространства  $\mathcal{X} = M_2(\mathbf{R})$  является упорядоченная совокупность матриц

$e = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ , где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Следовательно, } \dim M_2(\mathbf{R}) = 4.$$

**Пример 7.** Докажите, что базисом пространства всех многочленов от буквы  $t$  с вещественными коэффициентами степени не превосходящей 3, т.е. базисом  $\mathcal{X} = \mathbf{R}_3[t]$  является совокупность  $e = (1, t, t^2, t^3)$ , и тогда  $\dim \mathbf{R}_3[t] = 4$ . Заметим, что совокупность  $e' = (1, t, t^3, t^2)$  также является базисом этого пространства, но это другой базис, т.к. эти одночлены расположены в другом порядке.

**Пример 8.** Множество комплексных чисел  $\mathcal{X} = \mathbf{C}$  является вещественным линейным пространством, т.к. комплексные числа можно складывать, умножать на вещественные числа, и для этих операций выполнены 8 аксиом линейного пространства. Любое комплексное число может быть записано в алгебраической форме:  $z = a + ib$ , где  $a, b \in \mathbf{R}$ . Следовательно, числа 1 и  $i$  являются порождающей системой для пространства  $\mathcal{X}$ . Из равенства  $a + ib = 0$  следует:  $a = b = 0$ . Таким образом, совокупность чисел 1,  $i$  линейно независима. Поэтому числа 1 и  $i$  являются базисом пространства  $\mathcal{X}$  и  $\dim_{\mathbf{R}} \mathcal{X} = 2$ . Это обозначение подчёркивает, что пространство  $\mathcal{X}$  в данном примере является **вещественным** линейным пространством.

**Пример 9.** Множество комплексных чисел  $\mathcal{X}_1 = \mathbf{C}$  является комплексным линейным пространством, т.к. комплексные числа можно складывать, умножать на комплексные числа, и для этих операций выполнены 8 аксиом линейного пространства. Любое комплексное число  $z$  можно записать так:  $z = z \cdot 1$ , где  $1 \in \mathbf{C}$ . Следовательно, число 1 является порождающей системой для пространства  $\mathcal{X}_1$ . Из равенства  $z \cdot 1 = 0$  следует:  $z = 0$ . Таким образом, совокупность, состоящая из числа 1, линейно независима. Поэтому число 1 является базисом пространства  $\mathcal{X}_1$  и  $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{X}_1 = 1$ . Это обозначение подчёркивает, что пространство  $\mathcal{X}_1$  в данном примере является **комплексным** линейным пространством.

**Задача 1.** Найдите  $\dim_{\mathbf{R}} \mathcal{X}$ , где  $\mathcal{X} = M_2(\mathbf{C})$ .

**Задача 2.** Найдите  $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{X}_1$ , где  $\mathcal{X}_1 = M_2(\mathbf{C})$ .

**Теорема 2.** Любая порождающая система векторов  $n$ -мерного линейного пространства  $\mathcal{X}$  над полем  $\mathbf{K}$ , содержащая  $n$  векторов, является линейно независимой.

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{X} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle$ . Доказательство проведём от противного. Пусть система векторов  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  линейно зависима. Тогда из теоремы 4§2 следует, что один из этих векторов, например,  $\bar{x}_n$  есть линейная комбинация остальных векторов, т.е.  $\bar{x}_n = \text{ЛК}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$ . Следовательно,



$\mathcal{X} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n \rangle = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, \text{ЛК}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}) \rangle = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1} \rangle$ . Здесь мы воспользовались замечанием к определению 1§2. Пусть  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$  - базис  $\mathcal{X}$ . Тогда  $\bar{y}_i = \text{ЛК}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$ ,  $i = \overline{1, n}$ , т.к.

$\mathcal{X} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1} \rangle$ . Следовательно, по теореме 6§2 совокупность векторов  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$  линейно зависима, что противоречит тому, что это базис  $\mathcal{X}$ . Следовательно, наше предположение неверно, и система векторов  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  линейно независима.

**Следствие.** Любая упорядоченная порождающая система векторов  $n$ - мерного линейного пространства, содержащая  $n$  векторов, является базисом этого пространства.

**Теорема 3.** Любая линейно независимая система векторов  $n$ - мерного линейного пространства  $\mathcal{X}$  над полем  $\mathbf{K}$ , содержащая  $n$  векторов, является порождающей.

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{X} = \langle \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n \rangle$ , где  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$  - базис  $\mathcal{X}$ , и пусть  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  линейно независимая система векторов. Покажем, что любой вектор  $\bar{x} \in \mathcal{X}$  есть линейная комбинация векторов  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ . Каждый из векторов совокупности  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}$  есть линейная комбинация векторов базиса  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ . Число векторов этой совокупности больше числа комбинируемых векторов базиса, т.к.  $n+1 > n$ . Следовательно, эта совокупность  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}$  линейно зависима, а тогда по теореме 5§2 вектор  $\bar{x}$  есть линейная комбинация векторов  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ . Следовательно,  $\mathcal{X} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle$  и совокупность  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  - порождающая система пространства  $\mathcal{X}$ .

**Следствие.** Любая упорядоченная линейно независимая система векторов  $n$ - мерного линейного пространства, содержащая  $n$  векторов, является базисом этого пространства.

**Лемма.** Если число векторов линейно независимой совокупности  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$  конечномерного линейного пространства  $\mathcal{X}$  меньше размерности этого пространства  $m < n = \dim \mathcal{X}$ , то найдётся такой вектор

$\bar{x}_{m+1} \in \mathcal{X}$ , что совокупность векторов  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{x}_{m+1}$  линейно независима.

**Доказательство** проведём от противного. Пусть для любого вектора  $\bar{x} \in \mathcal{X}$  система векторов  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{x}$

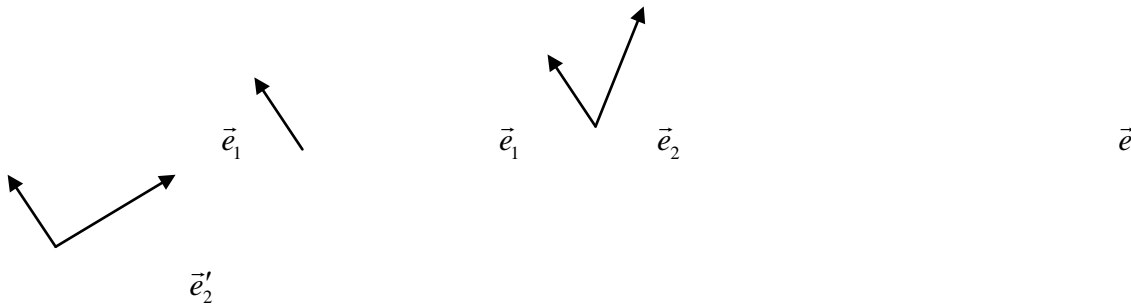
линейно зависима. Тогда по теореме 5§2 вектор  $\bar{x} = \text{ЛК}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$ . Следовательно,  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$  - линейно независимая и порождающая система, т.е. базис  $\mathcal{X}$ , а тогда  $\dim \mathcal{X} = m < n = \dim \mathcal{X}$ . Получили противоречие. Следовательно, наше предположение было неверно.

**Теорема 4.** Любую линейно независимую систему векторов конечномерного линейного пространства можно дополнить до базиса этого пространства.

**Доказательство.** Пусть  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$  - линейно независимая система векторов и  $\dim \mathcal{X} = n$ .

Если  $m = n$ , то это базис по следствию к теореме 3. Если  $m < n$ , то по лемме найдётся такой вектор  $\bar{x}_{m+1} \in \mathcal{X}$ , что совокупность векторов  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{x}_{m+1}$  линейно независима. Если  $m+1 = n$ , то это базис по следствию к теореме 3. В противном случае продолжим этот процесс. Через  $n - m$  шагов построим базис  $\mathcal{X}$ .

**Замечание.** Данную линейно независимую систему векторов (случай  $m < n$ ) можно дополнить до базиса пространства бесчисленным множеством способов. Например, на рисунке показано, что вектор  $\bar{e}_1 \in \mathcal{V}_2$  можно дополнить до базиса  $\mathcal{V}_2$  пространства свободных векторов на плоскости вектором  $\bar{e}_2$ , а можно и вектором  $\bar{e}'_2$  и т.д.



**Теорема 5.** Любая порождающая система векторов конечномерного линейного пространства содержит базис этого пространства.

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{X} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m \rangle$ . Если  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$  - линейно независимая система векторов, то это базис  $\mathcal{X}$ . В противном случае один из этих векторов, например,  $\bar{x}_m = \text{ЛК}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1})$ . Тогда

$\mathcal{X} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1}, \bar{x}_m \rangle = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1}, \text{ЛК}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1}) \rangle = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1} \rangle$ . Здесь мы воспользовались замечанием к определению 1 §2. Если  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1}$  - линейно независимая система векторов, то это базис  $\mathcal{X}$ . В противном случае продолжим процесс выбрасывания «лишних» векторов, и через  $m - n$  шагов получим базис  $\mathcal{X}$ . Теорема доказана.

#### §4. Координаты вектора. Матрица перехода.

Пусть  $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$  - базис  $\mathcal{X}$  - линейного пространства над полем  $\mathbf{K}$ . Из определения базиса следует, что любой вектор  $\bar{x}$  этого пространства может быть представлен в виде:

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n, \quad x_i \in \mathbf{K}, \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

Или, что то же самое:  $\vec{x} = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = e \cdot X$ , где  $e$  - базис  $\mathcal{A}$ ,  $X = (x_1 \dots x_n)^T$ .

**Определение 1.** Коэффициенты  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в разложении (1) вектора  $\vec{x}$  по базису  $e$  будем называть **координатами** вектора  $\vec{x}$  относительно базиса  $e$ .

Координаты вектора  $\vec{x}$  относительно базиса  $e$  будем записывать в столбик и обозначать так:  $[\vec{x}]_e$ .

Таким образом,  $[\vec{x}]_e \stackrel{def}{=} (x_1 x_2 \dots x_n)^T$ , и  $\vec{x} = e \cdot [\vec{x}]_e$ .

**Теорема 1.** Координаты вектора относительно данного базиса определены однозначно.

**Доказательство.** Пусть  $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  - базис  $\mathcal{A}$  - линейного пространства над полем  $\mathbf{K}$ ,  $\vec{x} \in \mathcal{A}$ , и пусть вектор  $\vec{x}$  разложен по базису  $e$  двумя способами:

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n, \quad x_i \in \mathbf{K}, \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

$$\vec{x} = x'_1 \vec{e}_1 + x'_2 \vec{e}_2 + \dots + x'_n \vec{e}_n, \quad x'_i \in \mathbf{K}, \quad i = \overline{1, n} \quad (2)$$

Вычтем из равенства (1) равенство (2). В результате получим:

$$\vec{0} = (x_1 - x'_1) \vec{e}_1 + (x_2 - x'_2) \vec{e}_2 + \dots + (x_n - x'_n) \vec{e}_n.$$

Из последнего равенства следует:  $x_1 - x'_1 = x_2 - x'_2 = \dots = x_n - x'_n = 0$ , т.к.  $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  - базис  $\mathcal{A}$  и потому линейно независимая система векторов. Следовательно,  $x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2, \dots, x_n = x'_n$ , и теорема доказана.

Проведём это же доказательство, используя матричную форму записи. Пусть справедливы равенства

$$\vec{x} = e \cdot X, \quad \text{где } X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T \quad (3)$$

$$\vec{x} = e \cdot X', \quad \text{где } X' = (x'_1 \ x'_2 \ \dots \ x'_n)^T \quad (4)$$

Вычтем из равенства (3) равенство (4). В результате получим:

$$\vec{0} = eX - eX' = e(X - X').$$

Из равенства  $e(X - X') = \vec{0}$  следует:  $X - X' = \vec{0} \Leftrightarrow X = X'$ , т.к.  $e$  - линейно независимая система векторов.

Здесь мы воспользовались дистрибутивностью и продемонстрировали насколько удобнее пользоваться матричной формой записи.

**Замечание.** Доказанное утверждение в матричной форме может быть сформулировано так: если для вектора  $\vec{x}$  справедливо равенство  $\vec{x} = e \cdot X$ , где  $e$  - базис, а  $X = (x_1 \dots x_n)^T$  - столбец чисел, то  $X = [\vec{x}]_e$ .

Действительно, только один числовой столбец, а именно координатный столбец  $[\vec{x}]_e$  может удовлетворять приведённому матричному равенству.

**Пример 1.** Пусть  $\mathcal{X} = \mathbf{R}_n$ ,  $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ , где  $\bar{e}_i = (0 \dots 0 1 0 \dots 0)$  - строка, у которой на  $i$ -ом месте

стоит единица,  $\bar{x} = (1 2 \dots n)$ . Очевидно, справедливо равенство:

$$\bar{x} = (1 2 \dots n) = 1 \cdot \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2 + \dots + n \cdot \bar{e}_n. \text{ Следовательно, } [\bar{x}]_e = (1 2 \dots n)^T.$$

**Теорема 2.** При сложении векторов их координаты складываются. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число. Другими словами, если  $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$  - базис линейного пространства  $\mathcal{X}$  над полем  $\mathbf{K}$ , то для любых векторов  $\bar{x}, \bar{y}$  этого пространства и для любого числа  $\lambda \in \mathbf{K}$  справедливы равенства:

$$1) [\bar{x} + \bar{y}]_e = [\bar{x}]_e + [\bar{y}]_e;$$

$$2) [\lambda \cdot \bar{x}]_e = \lambda \cdot [\bar{x}]_e.$$

**Доказательство.** Пусть  $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$ ,  $x_i \in \mathbf{K}$ ,  $i = \overline{1, n}$   
(1)

$$\text{и пусть } \bar{y} = y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2 + \dots + y_n \bar{e}_n, \quad y_i \in \mathbf{K}, \quad i = \overline{1, n}$$

(5)

1) Сложим равенства (1) и (5). В результате получим:

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1) \bar{e}_1 + (x_2 + y_2) \bar{e}_2 + \dots + (x_n + y_n) \bar{e}_n. \text{ Какие аксиомы линейного}$$

пространства использованы в этой выкладке? Полученное равенство и означает, что

$$[\bar{x} + \bar{y}]_e = ((x_1 + y_1) \quad (x_2 + y_2) \quad \dots \quad (x_n + y_n))^T = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)^T + (y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n)^T = [\bar{x}]_e + [\bar{y}]_e.$$

То же самое можно доказать используя матричную форму записи. Равенство (1), очевидно, эквивалентно

$$\text{равенству } \bar{x} = e \cdot [\bar{x}]_e, \text{ где } [\bar{x}]_e = (x_1 \dots x_n)^T \quad (6).$$

Равенство (5), очевидно, эквивалентно равенству  $\bar{y} = e \cdot [\bar{y}]_e$ , где

$$[\bar{y}]_e = (y_1 \dots y_n)^T \quad (7).$$

Сложим равенства (6) и (7):  $\bar{x} + \bar{y} = e \cdot [\bar{x}]_e + e \cdot [\bar{y}]_e = e \cdot ([\bar{x}]_e + [\bar{y}]_e)$ . Здесь мы

воспользовались дистрибутивностью. Из замечания к теореме 1 получаем:

$$[\bar{x} + \bar{y}]_e = [\bar{x}]_e + [\bar{y}]_e.$$

2) Умножим равенство (1) на число  $\lambda$ . В результате получим:

$$\lambda \cdot \bar{x} = (\lambda \cdot x_1) \bar{e}_1 + (\lambda \cdot x_2) \bar{e}_2 + \dots + (\lambda \cdot x_n) \bar{e}_n. \text{ Какие аксиомы линейного пространства}$$

использованы в этой выкладке? Полученное равенство и означает, что

$$[\lambda \cdot \bar{x}]_e = ((\lambda \cdot x_1) \quad (\lambda \cdot x_2) \quad \dots \quad (\lambda \cdot x_n))^T =$$

$$= \lambda \cdot (x_1 x_2 \dots x_n)^T = \lambda \cdot [\bar{x}]_e. \text{ То же самое можно доказать используя матричную форму}$$

записи. Умножим равенство (6) на число  $\lambda$ . В результате получим:

$$\lambda \cdot \bar{x} = \lambda \cdot (e \cdot [\bar{x}]_e) = e \cdot (\lambda \cdot [\bar{x}]_e). \text{ Из замечания к теореме 1 следует, что } [\lambda \cdot \bar{x}]_e = \lambda \cdot [\bar{x}]_e.$$

Теорема доказана.



- 1)  $[\bar{x}]_e = C_{e \rightarrow e'} \cdot [\bar{x}]_{e'}$ ;
- 2)  $C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e''} = C_{e \rightarrow e''}$ ;  $C_{e'' \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e} = C_{e'' \rightarrow e}$ ;
- 3)  $C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e} = E$ ;  $C_{e' \rightarrow e} \cdot C_{e \rightarrow e'} = E$ .

**Доказательство** проведём используя матричную форму записи.

1) Из определения 1 получаем:  $\bar{x} = e \cdot [\bar{x}]_e$  и  $\bar{x} = e' \cdot [\bar{x}]_{e'}$ . Из определения 2 следует, что  $e' = e \cdot C_{e \rightarrow e'}$ . Подставим это выражение вместо базиса  $e'$  в последнее равенство:  $\bar{x} = e' \cdot [\bar{x}]_{e'} = (e \cdot C_{e \rightarrow e'}) \cdot [\bar{x}]_{e'} = e \cdot (C_{e \rightarrow e'} \cdot [\bar{x}]_{e'})$ . Из замечания после теоремы 1 отсюда следует, что  $[\bar{x}]_e = C_{e \rightarrow e'} \cdot [\bar{x}]_{e'}$ .

2) Из определения 2 следует, что  $e' = e \cdot C_{e \rightarrow e'}$  и  $e'' = e' \cdot C_{e' \rightarrow e''}$ . Подставим в последнее равенство выражение для  $e'$  из предыдущего равенства. В результате получим:  $e'' = e' \cdot C_{e' \rightarrow e''} = (e \cdot C_{e \rightarrow e'}) \cdot C_{e' \rightarrow e''} = e \cdot (C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e''})$ .

Из замечания 1 к определению 2 следует:  $C_{e \rightarrow e''} = C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e''}$ . Второе равенство получается из полученного, если базисы  $e$  и  $e''$  поменять местами.

3) Положим  $e'' = e$ . Тогда из предыдущих равенств получаем:  $C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e} = C_{e \rightarrow e} = E$  и  $C_{e' \rightarrow e} \cdot C_{e \rightarrow e'} = C_{e' \rightarrow e'} = E$ .

Теорема доказана.

**Замечание.** Таким образом,  $C_{e \rightarrow e'} = C^{-1}_{e' \rightarrow e}$  и  $C_{e' \rightarrow e} = C^{-1}_{e \rightarrow e'}$ .

**Пример 2.** Пусть  $\mathcal{X} = \mathbf{R}_2[t]$ - пространство многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше второй. Любой многочлен этого пространства имеет вид:  $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c \cdot 1$ , где  $a, b, c \in \mathbf{R}$ .

Следовательно, совокупность  $1, t, t^2$  - порождающая для пространства  $\mathcal{X}$ , т.е.  $\mathcal{X} = \langle 1, t, t^2 \rangle$ .

Из равенства  $a \cdot t^2 + b \cdot t + c \cdot 1 = 0$  и определения равенства многочленов следует, что  $a = b = c = 0$ . Следовательно, совокупность  $e = (1, t, t^2)$  является линейно независимой, т.е. базисом пространства  $\mathcal{X}$  и  $\dim \mathcal{X} = 3$ . Покажем, что совокупность  $e' = (1, t+1, (t+1)^2)$  также является базисом пространства  $\mathcal{X}$ .

Из формулы Тейлора для многочленов степени не более второй следует, что любой такой многочлен можно записать следующим образом:

$$f(t) = f(-1) \cdot 1 + \frac{f'(-1)}{1!} (t+1) + \frac{f''(-1)}{2!} (t+1)^2.$$

Таким образом, совокупность  $e' = (1, t+1, (t+1)^2)$  - порождающая для пространства  $\mathcal{X}$ , причём  $\dim \mathcal{X} = 3$ .

Следовательно, по следствию к теореме 2 совокупность  $e'$  является базисом пространства  $\mathcal{X}$ . Подсчитаем матрицы перехода  $C_{e \rightarrow e'}$  и  $C_{e' \rightarrow e}$ .

Очевидно, справедливы равенства:

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ t+1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ (t+1)^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot t + 1 \cdot t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}'_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \end{cases} \Leftrightarrow C_{e \rightarrow e'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицу  $C_{e' \rightarrow e}$  можно найти с помощью теоремы 3, т.е. как матрицу, обратную к матрице  $C_{e \rightarrow e'}$ . Мы найдём эту матрицу исходя из определения.

Очевидно, справедливы равенства:

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (t+1) + 0 \cdot (t+1)^2 \\ t = -1 \cdot 1 + 1 \cdot (t+1) + 0 \cdot (t+1)^2 \\ t^2 = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (t+1) + 1 \cdot (t+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}'_1 + 0 \cdot \vec{e}'_2 + 0 \cdot \vec{e}'_3 \\ \vec{e}_2 = -1 \cdot \vec{e}'_1 + 1 \cdot \vec{e}'_2 + 0 \cdot \vec{e}'_3 \\ \vec{e}_3 = 1 \cdot \vec{e}'_1 - 2 \cdot \vec{e}'_2 + 1 \cdot \vec{e}'_3 \end{cases} \Leftrightarrow C_{e' \rightarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## ТЕМА 2.

Подпространство линейного пространства: определение, свойства.

Линейная оболочка множества в линейном пространстве.

Пересечение подпространств.

Объединение подпространств.

Линейная сумма подпространств.

Размерность линейной суммы (формула Грассмана).

Прямая сумма подпространств.

Разложение линейного пространства в прямую сумму подпространств.

### Подпространства конечномерных линейных пространств.

**Определение 1.** Пусть  $\mathcal{X}$  - линейное пространство над полем  $\mathbf{K}$ . Подмножество  $P$  векторов этого пространства будем называть **подпространством** этого пространства, если оно само является линейным пространством над полем  $\mathbf{K}$  относительно тех операций сложения и умножения на числа поля  $\mathbf{K}$ , которые имеются в  $\mathcal{X}$ .

### Теорема 1. Критерий подпространства.

Для того чтобы подмножество  $P$  линейного пространства  $\mathcal{X}$  над полем  $\mathbf{K}$  было подпространством этого пространства, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнуто относительно операций сложения и умножения на числа поля  $\mathbf{K}$ , которые имеются в  $\mathcal{X}$ , т.е. чтобы выполнялись следующие два требования:

- 1) для любых векторов  $\vec{x}, \vec{y}$  множества  $P$  их сумма  $\vec{x} + \vec{y}$  также принадлежит множеству  $P$ ;
- 2) для любого вектора  $\vec{x}$  множества  $P$  и любого числа  $\lambda \in \mathbf{K}$  их произведение  $\lambda \cdot \vec{x}$  также принадлежит множеству  $P$ .

**Доказательство. Необходимость** очевидна.

**Достаточность.** Выполнение требований 1) и 2) означает, что на множестве  $P$  определены операции сложения и умножения на числа поля  $\mathbf{K}$ , совпадающие с соответствующими операциями на  $\mathcal{X}$ . Проверим выполнение 8 аксиом. Аксиомы 1,2,5-8 выполнены для всех векторов из  $\mathcal{X}$ , в частности, для всех векторов подмножества  $P$ .

Покажем, что выполнена и 3-я аксиома. Для этого покажем, что  $\vec{0} \in P$ . Из условия 2) следует, что если  $\vec{x} \in P$ , то и  $\vec{0} = 0 \cdot \vec{x} \in P$ .

Покажем, что выполнена и 4-я аксиома. Для этого покажем, что если  $\vec{x} \in P$ , то и  $-\vec{x} \in P$ . Из условия 2) следует, что если  $\vec{x} \in P$ , то и  $-\vec{x} = (-1) \cdot \vec{x} \in P$ .

Теорема доказана.

**Пример 1.** Подмножества  $P = \{\vec{0}\}$  и  $\mathcal{X}$  являются подпространствами линейного пространства  $\mathcal{X}$ . Эти подпространства мы будем называть тривиальными.

**Замечание.** По определению размерность линейного пространства, состоящего только из нулевого вектора, равна нулю, т.е.  $\dim\{\vec{0}\} \stackrel{\text{def}}{=} 0$ .

**Пример 2.** Пусть векторы  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{X}$  - линейному пространству полем  $\mathbf{K}$ . По теореме 1 подмножество  $P = \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \rangle$  является подпространством линейного пространства  $\mathcal{X}$ , т.к. сумма двух линейных комбинаций векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$  также является линейной комбинацией этих векторов, и произведение любого числа  $\lambda \in \mathbf{K}$  на линейную комбинацию этих векторов также является линейной комбинацией этих векторов.

**Пример 3.** Пусть  $\mathcal{X} = \mathbf{R}_2[t]$  - пространство многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше второй  $P = \mathbf{R}_1[t] = \{c_0 + c_1 t\}$ . Очевидно,  $P \subset \mathcal{X}$  и  $P$  является подпространством  $\mathcal{X}$ . Например, потому, что  $P = \langle 1, t \rangle$ .

**Пример 4.** Пусть  $\mathcal{X} = \mathbf{R}^n$ ;  $A \in M_m(\mathbf{R})$ . Обозначим через  $P$  множество решений системы линейных однородных алгебраических уравнений  $AX = 0$ , т.е.  $P = \{Y, Y \in \mathcal{X} : AY = 0\}$ . Подмножество  $P$  является подпространством линейного пространства  $\mathcal{X}$ . Это следует из леммы §1 главы IV, т.к. по этой лемме линейная комбинация решений системы линейных однородных алгебраических уравнений также является решением этой системы.

**Пример 5.** Пусть  $\mathcal{X}$  - линейное пространство над полем  $\mathbf{K}$ ,  $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  - базис этого пространства,  $A \in M_m(\mathbf{R})$ . Обозначим через  $P$  множество всех векторов этого пространства, координатные столбцы которых относительно базиса  $e$  являются решениями системы линейных однородных алгебраических уравнений  $AX = 0$ , т.е.  $P = \{\vec{x}, \vec{x} \in \mathcal{X} : A[\vec{x}]_e = 0\}$ . Подмножество  $P$  является подпространством линейного пространства  $\mathcal{X}$ . Докажите это утверждение. В этом случае говорят, что система линейных однородных алгебраических уравнений  $AX = 0$  задает подпространство  $P$  (в базисе  $e$ ).

**Замечание.** Подпространства линейного пространства можно задавать разными способами, используя особенности этих пространств. Примеры 2 и 5 дают два универсальных способа задания подпространства в любом линейном пространстве.

**Теорема 2.** Размерность любого подпространства конечномерного линейного пространства не превосходит размерности этого пространства, т.е. если  $P$  является подпространством линейного пространства  $\mathcal{X}$ , то



$\dim P \leq \dim \mathcal{X}$ .

**Доказательство.** Пусть  $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$  - базис  $\mathcal{X}$ , т.е.  $\dim \mathcal{X} = n$ ;  $y = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_k)$  - базис  $P$ , т.е.

$\dim P = k$ . Пусть  $k > n$ . Любой вектор  $\bar{y}_i$  может быть разложен по базису  $e$ , т.к.  $e$  - базис  $\mathcal{X}$ . Следовательно,  $\bar{y}_i = \text{ЛК}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , причём число  $k$  линейных комбинаций больше числа  $n$  комбинируемых векторов. Следовательно, совокупность  $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_k$  линейно зависима по теореме 6 §2, что противоречит тому, что это базис  $P$ . Таким образом,  $k = \dim P \leq \dim \mathcal{X} = n$ , и теорема доказана.

**Теорема 3.** Если размерность подпространства  $P$  конечномерного линейного пространства  $\mathcal{X}$  равна размерности этого пространства, то они равны, т.е.  $P = \mathcal{X}$ .

**Доказательство.** Пусть  $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$  - базис  $P$ , т.е.  $P = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n \rangle$  и пусть  $\dim \mathcal{X} = n$ .

Тогда по следствию к теореме 3 §3  $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$  - базис  $\mathcal{X}$ . Следовательно,  $P = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n \rangle = \mathcal{X}$ .

**Теорема 4.** Базис любого подпространства  $P$  конечномерного линейного пространства  $\mathcal{X}$  можно дополнить до базиса этого пространства.

**Доказательство.** Пусть  $v = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p)$  - базис подпространства  $P$  линейного пространства  $\mathcal{X}$ . По теореме 4 §2 базис  $v$  можно дополнить до базиса пространства  $\mathcal{X}$ , т.к.  $v$  - линейно независимая совокупность. Теорема доказана.

Если  $\dim \mathcal{X} > 1$ , то пространство  $\mathcal{X}$  содержит бесчисленное множество различных подпространств, из которых можно конструировать новые подпространства. Приведём две такие конструкции.

**Определение 2.** Суммой подпространств  $P$  и  $Q$  линейного пространства  $\mathcal{X}$  над полем  $\mathbf{K}$

будем называть совокупность всех векторов вида  $\bar{p} + \bar{q}$ , где  $\bar{p} \in P$ ,  $\bar{q} \in Q$ .

Обозначать сумму подпространств  $P$  и  $Q$  будем так:  $P + Q$ .

Таким образом,  $P + Q \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x}, \bar{x} \in \mathcal{X} : \bar{x} = \bar{p} + \bar{q}; \bar{p} \in P, \bar{q} \in Q\}$ .

Аналогичным образом определяется сумма **конечного числа** подпространств  $P_1, P_2, \dots, P_m$  линейного пространства  $\mathcal{X}$ . Сумму подпространств  $P_1, P_2, \dots, P_m$  будем обозначать так:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_m \quad \text{или так:} \quad \sum_{i=1}^m P_i.$$

По определению:  $\sum_{i=1}^m P_i \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x}, \bar{x} \in \mathcal{X} : \bar{x} = \sum_{i=1}^m \bar{p}_i, \bar{p}_i \in P_i, i = \overline{1, m}\}$ .

**Определение 3.** Пересечением подпространств  $P$  и  $Q$  линейного пространства  $\mathcal{X}$  над полем  $\mathbf{K}$

будем называть совокупность всех векторов этого пространства, принадлежащих как подпространству  $P$ , так и подпространству  $Q$ . Обозначать пересечение подпространств  $P$  и  $Q$  будем так:  $P \cap Q$ .

Таким образом,  $P \cap Q \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x}, \bar{x} \in \mathcal{X} : \bar{x} \in P; \bar{x} \in Q\}$ .

Аналогичным образом определяется пересечение **любого** множества подпространств  $P_i$ , где индекс  $i$  пробегает множество индексов  $I$  (конечное или бесконечное). Пересечение подпространств  $P_i$ , где  $i \in I$ , будем обозначать так:

$$\bigcap_{i \in I} P_i.$$

По определению:  $\bigcap_{i \in I} P_i \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x}, \bar{x} \in \mathcal{X} : \bar{x} \in P_i, \forall i \in I\}$ .

**Теорема 5.** Сумма **конечного** числа подпространств линейного пространства  $\mathcal{X}$  над полем  $\mathbf{K}$  является подпространством этого пространства.

Пересечение **любого** множества подпространств линейного пространства  $\mathcal{X}$  над полем  $\mathbf{K}$  является подпространством этого пространства.

**Доказательство.**

I. Пусть  $P_1, P_2, \dots, P_m$  - подпространства линейного пространства  $\mathcal{X}$  над полем  $\mathbf{K}$ .

Покажем, что

множество  $P = \sum_{i=1}^m P_i$  замкнуто относительно операций сложения и умножения на

числа поля  $\mathbf{K}$ , которые

имеются в  $\mathcal{X}$ , т.е. покажем, что для множества  $P$  выполняются условия 1) и 2)

теоремы 1.

1) Пусть векторы  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in P$ . Из определения 2 следует, что для этих векторов справедливы

равенства:  $\bar{x}_1 = \sum_{i=1}^m \bar{p}'_i, \bar{x}_2 = \sum_{i=1}^m \bar{p}''_i$ , где  $\bar{p}'_i, \bar{p}''_i \in P_i$  для  $i = \overline{1, m}$ . Подпространства  $P_i$

замкнуты относительно операции сложения, т.е. из включений  $\bar{p}'_i, \bar{p}''_i \in P_i$

следует, что  $\bar{p}'_i + \bar{p}''_i \in P_i$

для всех  $i = \overline{1, m}$ . Отсюда следует, что  $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \sum_{i=1}^m \bar{p}'_i + \sum_{i=1}^m \bar{p}''_i = \sum_{i=1}^m (\bar{p}'_i + \bar{p}''_i) \in P$ .

2) Пусть число  $\lambda \in \mathbf{K}$ ,  $\bar{x}_1 = \sum_{i=1}^m \bar{p}'_i \in P$ , где  $\bar{p}'_i \in P_i$  для  $i = \overline{1, m}$ . Отсюда следует,

что  $\lambda \cdot \bar{x}_1 = \sum_{i=1}^m (\lambda \cdot \bar{p}'_i) \in P$ , т.к.  $P_i$  - подпространства  $\mathcal{X}$  и потому замкнуты

относительно операции

умножения на числа поля  $\mathbf{K}$ , т.е. из включения  $\bar{p}'_i \in P_i$  следует, что  $\lambda \cdot \bar{p}'_i \in P_i$  для

всех  $i = \overline{1, m}$ .

II. Пусть  $Q_i$  - подпространства линейного пространства  $\mathcal{X}$  над полем  $\mathbf{K}$  для всех  $i \in I$ . Покажем, что

множество  $Q = \bigcap_{i \in I} Q_i$  замкнуто относительно операций сложения и умножения на

числа поля  $\mathbf{K}$ , которые

имеются в  $\mathcal{X}$ , т.е. покажем, что для множества  $Q$  выполняются условия 1) и 2)

теоремы 1.

1) Пусть векторы  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in Q$ . Из определения 3 следует, что для этих векторов справедливы включения:  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in Q_i$  для всех  $i \in I$ . Подпространства  $Q_i$  - замкнуты относительно операции сложения. Поэтому из включений  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in Q_i$  следует, что  $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in Q_i$  для всех  $i \in I$ .

2) Пусть число  $\lambda \in \mathbf{K}$ ,  $\bar{x}_1 \in Q$ . Из определения 3 следует, что для этого вектора справедливо включение

$\bar{x}_1 \in Q_i$  для всех  $i \in I$ . Подпространства  $Q_i$  - замкнуты относительно операции умножения на числа поля  $\mathbf{K}$ , т.е. из включения  $\bar{x}_1 \in Q_i$  следует, что  $\lambda \cdot \bar{x}_1 \in Q_i$  для всех  $i \in I$ .

Теорема доказана.

**Теорема 6.** (Теорема Грассмана.)

Для любых подпространств  $P$  и  $Q$  конечномерного линейного пространства  $\mathcal{X}$  над полем  $\mathbf{K}$  справедливо равенство  $\dim P + \dim Q = \dim(P + Q) + \dim(P \cap Q)$ .

**Доказательство.** Введём обозначения:

$$p = \dim P; \quad q = \dim Q, \quad s = \dim(P + Q), \quad t = \dim(P \cap Q).$$

Мы хотим доказать, что  $p + q = s + t$ . Выберем базис подпространства  $P \cap Q$ :

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_t.$$

По теореме 4 этот базис можно дополнить до базиса подпространства  $P$  и до базиса подпространства  $Q$ , т.к.  $P \cap Q$  является подпространством и  $P$ , и  $Q$ .

Пусть  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_t, \bar{u}_{t+1}, \dots, \bar{u}_p$  - базис  $P$  (1),

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_t, \bar{v}_{t+1}, \dots, \bar{v}_q$$
 - базис  $Q$  (2).

I. Докажем, что совокупность векторов  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_t, \bar{u}_{t+1}, \dots, \bar{u}_p, \bar{v}_{t+1}, \dots, \bar{v}_q$  - базис  $P + Q$  (3).

Тогда отсюда следует, что  $s = p + q - t \Leftrightarrow p + q = s + t$ .

Сначала докажем, что система (3) линейно независима. Для этого составим линейную комбинацию этих векторов и приравняем её к нулевому вектору:

$$\alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_t \bar{u}_t + \alpha_{t+1} \bar{u}_{t+1} + \dots + \alpha_p \bar{u}_p + \beta_{t+1} \bar{v}_{t+1} + \dots + \beta_q \bar{v}_q = \bar{0} \quad (4)$$

Первые  $p$  слагаемых перенесём направо. В результате получим:

$\beta_{t+1} \bar{v}_{t+1} + \dots + \beta_q \bar{v}_q = -\alpha_1 \bar{u}_1 - \dots - \alpha_p \bar{u}_p \in P \cap Q$ , т.к. вектор в левой части равенства из подпространства  $Q$ , а вектор в правой части равенства из подпространства  $P$ .

Следовательно, этот вектор можно разложить по базису  $P \cap Q$ . Таким образом, получаем:

$\beta_{t+1}\bar{v}_{t+1} + \dots + \beta_q\bar{v}_q = -\beta_1\bar{u}_1 - \dots - \beta_t\bar{u}_t$ , откуда следует равенство:

$\beta_1\bar{u}_1 + \dots + \beta_t\bar{u}_t + \beta_{t+1}\bar{v}_{t+1} + \dots + \beta_q\bar{v}_q = \bar{0}$ . Следовательно,  $\beta_1 = \dots = \beta_t = \beta_{t+1} = \dots = \beta_q = 0$ , т.к. совокупность векторов (2) линейно независимая как базис  $Q$ .

Тогда из равенства (4) следуют равенства  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$ , т.к. совокупность векторов (1) линейно независимая как базис  $P$ .

Таким образом, из равенства (4) следует, что  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = \beta_{t+1} = \dots = \beta_q = 0$ , т.е. совокупность векторов (3) линейно независимая по определению 4§2.

II. Теперь докажем, что совокупность (3) является порождающей подпространства  $P+Q$ . По определению 2 любой вектор  $\bar{z} \in P+Q$  может быть записан в виде  $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$ , где  $\bar{x} \in P$ ,  $\bar{y} \in Q$ . Векторы  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  можно разложить по базисам (1) и (2) подпространств  $P$  и  $Q$  соответственно:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^p x_i \bar{u}_i, \text{ где } x_i \in \mathbf{K} \text{ для } i = \overline{1, p}; \quad \bar{y} = \sum_{j=1}^t y_j \bar{u}_j + \sum_{j=t+1}^q y_j \bar{v}_j, \text{ где } y_j \in \mathbf{K} \text{ для } j = \overline{1, q}.$$

Таким образом, любой вектор  $\bar{z} \in P+Q$  может быть записан так:

$$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} = \sum_{i=1}^p x_i \bar{u}_i + \sum_{i=1}^t y_i \bar{u}_i + \sum_{j=t+1}^q y_j \bar{v}_j = \sum_{i=1}^t (x_i + y_i) \bar{u}_i + \sum_{i=t+1}^p x_i \bar{u}_i + \sum_{j=t+1}^q y_j \bar{v}_j, \text{ т.е. совокупность (3)}$$

является порождающей подпространства  $P+Q$ .

Итак, совокупность (3) линейно независимая и порождающая для подпространства  $P+Q$ . Следовательно, по определению 3§3 это базис подпространства  $P+Q$ , и теорема б доказана.

## §6. Прямая сумма подпространств.

**Определение 1.** Сумму двух подпространств  $P$  и  $Q$  линейного пространства  $\mathcal{X}$  будем называть **прямой**, если для любого вектора  $\bar{z} \in P+Q$  его представление в виде  $\bar{z} = \bar{p} + \bar{q}$ , где  $\bar{p} \in P$ ,  $\bar{q} \in Q$ , **однозначно**.

Обозначать прямую сумму подпространств  $P$  и  $Q$  будем так:  $P \oplus Q$ .

Аналогично определяется **прямая сумма конечного числа** подпространств  $P_1, P_2, \dots, P_m$  линейного пространства  $\mathcal{X}$ . Сумму подпространств  $\sum_{i=1}^m P_i$  будем

называть **прямой**, если для любого вектора  $\bar{z} \in \sum_{i=1}^m P_i$  его представление в виде

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^m \bar{p}_i, \bar{p}_i \in P_i, \quad i = \overline{1, m}, \text{ однозначно.}$$

Прямую сумму подпространств  $P_1, P_2, \dots, P_m$  будем обозначать так:  $P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_m$

или так:  $\bigoplus_{i=1}^m P_i$ .

**Определение 2.** Если  $\mathcal{X} = P \oplus Q$ , то говорят, что пространство  $\mathcal{X}$  раскладывается в прямую сумму подпространств  $P$  и  $Q$ . В этом случае подпространство  $Q$  называют **прямым дополнением** подпространства  $P$  до пространства  $\mathcal{X}$ .

Разумеется, в этом случае подпространство  $P$  является прямым дополнением подпространства  $Q$  до пространства  $\mathcal{X}$ .

**Определение 3.** Пусть пространство  $\mathcal{X}$  раскладывается в прямую сумму подпространств  $P$  и  $Q$ , т.е.

$\mathcal{X} = P \oplus Q$ . Тогда любой вектор  $\vec{z} \in \mathcal{X}$  может быть единственным образом представлен в виде:

$\vec{z} = \vec{p} + \vec{q}$ , где  $\vec{p} \in P, \vec{q} \in Q$ . В этом случае вектор  $\vec{p}$  называют **проекцией вектора  $\vec{z}$  на подпространство  $P$  параллельно подпространству  $Q$**  и обозначают так:

$$\vec{p} = pr_{P/Q} \vec{z}.$$

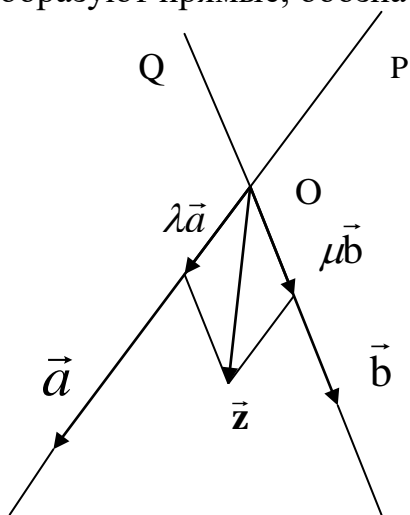
**Пример 1.** Пусть  $\mathcal{X}$  - пространство свободных векторов на плоскости, т.е.  $\mathcal{X} = \mathcal{V}_2$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  - два неколлинеарные вектора этого пространства. Тогда  $(\vec{a}, \vec{b})$  - базис  $\mathcal{X}$ .

Пусть  $P = \langle \vec{a} \rangle, Q = \langle \vec{b} \rangle$ .

Любой вектор  $\vec{z} \in \mathcal{V}_2$  может быть единственным образом разложен по этому базису:  $\vec{z} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ , где

$\lambda \vec{a} \in P, \mu \vec{b} \in Q$ . Следовательно,  $\mathcal{X} = P \oplus Q$ , подпространство  $Q$  является прямым дополнением подпространства  $P$  до пространства  $\mathcal{X}$ ,  $\lambda \vec{a} = pr_{P/Q} \vec{z}$ .

Приведённый ниже рисунок служит иллюстрацией к примеру 1. На этом рисунке все векторы, принадлежащие пространству  $\mathcal{V}_2$ , имеют начало в точке  $O$ . Концы векторов, принадлежащих подпространствам  $P$  и  $Q$  соответственно, образуют прямые, обозначенные на рисунке теми же буквами.



**Пример 2.** Пусть  $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  - базис конечномерного линейного пространства  $\mathcal{X}$  над полем  $\mathbf{K}$ .

Обозначим через  $P_i$  линейную оболочку, натянутую на вектор  $\vec{e}_i$ , т.е.  $P_i = \langle \vec{e}_i \rangle$ . Любой вектор  $\vec{z} \in \mathcal{X}$  может быть единственным образом разложен по этому базису:  $\vec{z} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i$ , где  $\lambda_i \vec{e}_i \in P_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Следовательно,  $\mathcal{X} = \bigoplus_{i=1}^n P_i$ .

**Задача 1.** Пусть  $\mathcal{X} = M_n(\mathbf{K})$ . Обозначим через  $P$  и  $Q$  множество всех симметричных и антисимметричных матриц пространства  $\mathcal{X}$  соответственно, т.е.  $P = \{A, A \in \mathcal{X} : A = A^T\}$ ;  $Q = \{A, A \in \mathcal{X} : A = -A^T\}$ .

Докажите, что  $P$  и  $Q$  - подпространства  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{X} = P \oplus Q$ . Для произвольной матрицы  $A \in \mathcal{X}$  найдите  $pr_{P \oplus Q} A$ .

**Задача 2.** Докажите, что для двух подпространств  $P$  и  $Q$  - конечномерного линейного пространства  $\mathcal{X}$  одинаковой размерности существует общее прямое дополнение. Другими словами: если  $\dim P = \dim Q$ , то существует подпространство  $L$  линейного пространства  $\mathcal{X}$  такое, что справедливы равенства  $\mathcal{X} = P \oplus L$  и  $\mathcal{X} = Q \oplus L$ .

### Теорема 1. Критерий прямой суммы двух подпространств.

Для того чтобы сумма подпространств  $P$  и  $Q$  линейного пространства  $\mathcal{X}$  над полем  $\mathbf{K}$  была прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий.

I. Из равенства  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$ , где  $\vec{x} \in P$ ,  $\vec{y} \in Q$  следует, что  $\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$ .

II.  $P \cap Q = \{\vec{0}\}$

III.  $\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q$ .

IV. Базис суммы  $P + Q$  есть объединение базисов подпространств  $P$  и  $Q$ .

**Доказательство. I. Необходимость.** Пусть сумма  $P + Q$  прямая и пусть  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$ , где  $\vec{x} \in P$ ,  $\vec{y} \in Q$ . Очевидно, справедливо равенство  $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ , причём  $\vec{0} \in P$ ,  $\vec{0} \in Q$ . Представление любого вектора прямой суммы в виде суммы двух слагаемых, одно из которых из подпространства  $P$ , а другое – из подпространства  $Q$ , однозначно. Следовательно,  $\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$ .

**Достаточность.** Пусть выполнено условие I. Докажем, что в этом случае сумма  $P + Q$  прямая. Пусть  $\vec{z} \in P + Q$  и для этого вектора справедливы равенства:  $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$  и  $\vec{z} = \vec{x}_1 + \vec{y}_1$ , где  $\vec{x}, \vec{x}_1 \in P$ ,  $\vec{y}, \vec{y}_1 \in Q$ . Вычтем из первого равенства второе. В результате получим:

$\vec{0} = (\vec{x} - \vec{x}_1) + (\vec{y} - \vec{y}_1)$ , где  $\vec{x} - \vec{x}_1 \in P$ ,  $\vec{y} - \vec{y}_1 \in Q$ , потому что  $P$  и  $Q$  замкнуты относительно операций сложения и умножения на числа поля  $\mathbf{K}$ . Следовательно,

по условию  $\bar{x} - \bar{x}_1 = \vec{0}$ ,  $\bar{y} - \bar{y}_1 = \vec{0}$  и  $\bar{x} = \bar{x}_1$ ,  $\bar{y} = \bar{y}_1$ . Таким образом, для любого вектора  $\bar{z} \in P + Q$  его представление в виде  $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$ , где  $\bar{x} \in P$ ,  $\bar{y} \in Q$ , однозначно. Следовательно, сумма подпространств  $P$  и  $Q$  прямая.

**II. Необходимость.** Пусть сумма  $P + Q$  прямая и  $\bar{z} \in P \cap Q$ . Очевидно, справедливо равенство  $\bar{z} + (-\bar{z}) = \vec{0}$ , причём  $\bar{z} \in P$ ,  $-\bar{z} \in Q$ .

По первому критерию прямой суммы отсюда следует, что  $\bar{z} = \vec{0}$ .

**Достаточность.** Пусть  $P \cap Q = \{\vec{0}\}$ . Докажем, что выполнены условия

предыдущего критерия. Пусть  $\bar{x} + \bar{y} = \vec{0}$ , где  $\bar{x} \in P$ ,  $\bar{y} \in Q$ . Тогда

$\bar{x} = -\bar{y}$ , причём  $\bar{x} \in P$ ,  $-\bar{y} \in Q$ . Следовательно,  $\bar{x} = -\bar{y} \in P \cap Q = \{\vec{0}\}$ , т.е.  $\bar{x} = \bar{y} = \vec{0}$ , и по предыдущему критерию сумма  $P + Q$  прямая.

**III. Необходимость.** Пусть сумма  $P + Q$  прямая. Тогда по второму критерию  $P \cap Q = \{\vec{0}\}$ . Следовательно, по теореме 6§5

$$\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q) = \dim P + \dim Q - 0 = \dim P + \dim Q, \text{ т.к.}$$

$$\dim(P \cap Q) = \dim\{\vec{0}\} = 0.$$

**Достаточность.** Пусть  $\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q$ . Тогда из той же теоремы 6§5 следует, что  $\dim(P \cap Q) = 0$ . Следовательно,

$P \cap Q = \{\vec{0}\}$ , и по второму критерию сумма  $P + Q$  прямая.

**IV. Необходимость.** Пусть сумма  $P + Q$  прямая. Из предыдущего критерия следует, что  $\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q$ . Пусть  $u = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p)$  - базис подпространства

$P$ ,  $v = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q)$  - базис  $Q$ . Покажем, что совокупность  $u \cup v = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q)$  -

базис  $P + Q$ . Сначала покажем, что  $u \cup v$  - порождающая для суммы  $P + Q$ .

Действительно, любой вектор  $\bar{z} \in P + Q$  имеет вид

$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$ , где  $\bar{x} \in P$ ,  $\bar{y} \in Q$ . Векторы  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  можно разложить по базисам  $u$  и  $v$  подпространств  $P$  и  $Q$  соответственно:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^p x_i \bar{u}_i, \quad \bar{y} = \sum_{j=1}^q y_j \bar{v}_j. \text{ Следовательно, } \bar{z} = \bar{x} + \bar{y} = \sum_{i=1}^p x_i \bar{u}_i + \sum_{j=1}^q y_j \bar{v}_j. \text{ Таким образом,}$$

совокупность  $u \cup v = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q)$  - порождающая для подпространства  $P + Q$ , причём количество векторов в этой порождающей равно размерности  $P + Q$ . По следствию к теореме 2§3 это базис  $P + Q$ .

**Достаточность.** Пусть совокупность  $u \cup v = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q)$  - базис  $P + Q$ , где

$u = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p)$  - базис подпространства  $P$ ,  $v = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q)$  - базис  $Q$ . Тогда

$\dim(P + Q) = p + q$  и, следовательно,  $\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q$ , потому что  $\dim P = p$ ,  $\dim Q = q$ . Теорема доказана.

Приведём формулировку теоремы, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 1.

**Теорема 2. Критерий прямой суммы конечного числа подпространств.**

Для того чтобы сумма подпространств  $P_1, P_2, \dots, P_m$  линейного пространства  $\mathcal{X}$  над полем  $\mathbf{K}$  была прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий.

I. Из равенства  $\sum_{i=1}^m \vec{p}_i = \vec{0}$ , где  $\vec{p}_i \in P_i$  для  $i = \overline{1, m}$  следует, что  $\vec{p}_i = \vec{0}$  для  $i = \overline{1, m}$ .

$$\text{II. } P_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m P_j = \{\vec{0}\}$$

$$\text{III. } \dim \sum_{i=1}^m P_i = \sum_{i=1}^m \dim P_i .$$

IV. Базис суммы  $\sum_{i=1}^m P_i$  есть объединение базисов подпространств  $P_i$  для  $i = \overline{1, m}$ .

Доказательства первых двух утверждений совершенно аналогичны доказательствам утверждений I и II в теореме 1. Доказательство двух других нужно провести в следующем порядке. Сначала докажите методом математической индукции по числу подпространств необходимость утверждения

III. Предварительно докажите, что если сумма  $\sum_{i=1}^m P_i$  прямая, то и сумма  $\sum_{i=1}^{m-1} P_i$ , а

также сумма подпространств  $\sum_{i=1}^{m-1} P_i$  и  $P_m$  прямые. Затем докажите необходимость утверждения IV, используя необходимость утверждения III.

Далее докажите достаточность утверждения IV и, наконец, достаточность утверждения III. Конечно, можно доказывать и по-другому.