**Задача 1.**  Изобразить на комплексной плоскости множество *D*, заданное неравенствами:

*D* = {*z* : |*z* − *i*| ≤ 2*,* |*π/*2 − arg *z*| *> π/*3} *.*

**Решение.** Неравенство |*z* − *i*| ≤ 2 задает на комплексной плоскости замкнутый круг *D*1 радиуса 2 c центром в точке *z* = *i*; неравенство

|*π/*2 − arg *z*| *> π/*3 задает множество точек *D*2, аргументы которых

по модулю больше *π/*2 на *π/*3, то есть arg *z < π/*6 и arg *z >* 5*π/*6. Множество *D* является пересечением множеств *D*1 и *D*2. Множества *D*1, *D*2 и *D* изображены на рисунке 1.

б) Изобразить на комплексной плоскости множество *D*, заданное неравенствами:

*D* = {*z* : |*z*| *>* 2 − Re*z,* 0 ≤ arg *z* ≤ *π/*4} *.*

**Решение.** Обозначим *z* = *x* + *iy*, тогда неравенство |*z*| *>* 2 − Re*z* в координатах (*x, y*) примет вид *x*2 + *y*2 *>* 2 − *x*. Если *x >* 2, то неравенство |*z*| *>* 2 − Re*z* справедливо при любом вещественном значении *y*; если же *x* ≤ 2, то из неравенства *x*2 + *y*2 *>* 2 − *x* следует *x*2 + *y*2 *>* (2 − *x*)2. Отсюда имеем, что при *x* ≤ 2 выполнено неравенство *y*2 *>* 4 (1 − *x*). Точки, удовлетворяющие этому неравенству, лежат правее параболы *y*2 = 4 (1 − *x*). Таким образом, мы получили, что *D*1 - множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству |*z*| *>* 2 − Re*z*, лежит правее параболы *y*2 = 4 (1 − *x*). Неравенство 0 ≤ arg *z* ≤ *π/*4 задает множество *D*2, представляющее собой замыкание внутренности угла, сторонами которого являются лучи *ϕ* = 0 и *ϕ* = *π/*4. Множество *D* является пересечением множеств *D*1 и *D*2 (см. рисунок 2).

√

√

12 *Задание 2*



Рис. 1: к решению задания 2а. Рис. 2: к решению задания 2б.

## Варианты задания 1

Изобразить на комплексной плоскости множество *D*.

1. *D* = {*z* : 2 ≤ |*z* + 2| *<* 3*,* −*π/*2 *<* arg *z* ≤ *π/*2};

2. *D* = {*z* : 1 ≤ |*z* + 1 − 2*i*| ≤ 3*, π* ≤ arg *z <* 2*π*}; 3. *D* = {*z* : 1 ≤ |*z* + 3 − 2*i*| *<* 4*,* | arg *z*| ≤ 3*π/*4}; 4. *D* = {*z* : 2 *<* |*z* + 2 − 2*i*| ≤ 5*,* | arg *z*| *> π/*2};

5. *D* = {*z* : |*z*| *>* 3 + Re*z, π/*2 ≤ arg *z <* 2*π/*3};

6. *D* = {*z* : |*z* + 2 + 3*i*| *<* 3 + *z, π* ≤ arg *z* ≤ 3*π/*2};

7. *D* = {*z* : |*z*| ≤ 5*,* |3*π/*2 − arg *z*| *< π/*3};

8. *D* = {*z* : |*z*| *<* 6 − Im*z,* |*z*| ≤ 4};

9. *D* = {*z* : |*z*| ≥ 3 − Re*z,* |*z*| *>* 4};

10. *D* = {*z* : |*z*| *>* 3*,* |*z* − 4| ≤ 2*,* −*π/*2 ≤ arg *z <* 0};

11. *D* = {*z* : |*z* − 1| *<* 1*, z* + *z*¯ ≤ 1};

12. *D* = {*z* : |*z* + *i*| ≤ 1*,* |3*π/*2 − arg *z*| *< π/*3};

13. *D* = {*z* : |*z* − 3 + 2*i*| ≤ 2*,* 0 *<* Re(*iz*) ≤ 1};

14. *D* = {*z* : |*z*| *>* 1 + Re*z,* |*z* − *i*| ≤ 2};

15. *D* = {*z* : 1 *<* |*z* − 1| ≤ 2*, π/*4 ≤ arg *z < π/*3};

16. *D* = {*z* : |*z*| ≤ 4 + Im*z,* |*z* − 1*/*2| *<* 4};

17. *D* = {*z* : |*z* − 4 − 3*i*| ≥ 2*, z* + *z*¯ *<* 1};

18. *D* = {*z* : |*z* + 1 − *i*| *>* √2*,* |Re(*iz*)| ≤ 1};

19. *D* = {*z* : |*z* − *i*| ≤ 2*,* |3*π/*2 − arg *z*| *< π/*6};

20. *D* = {*z* : |*z*| *>* 1 − Re*z,* |*z* + *i*| ≤ 1};

21. *D* = {*z* : |*z*| *>* 1*,* −1 *<* Im*z* ≤ 1*,* 0 *<* Re*z* ≤ 2};

22. *D* = {*z* : |*z* − 1| *>* 1*,* −1 ≤ Im*z <* 0*,* 0 ≤ Re*z <* 3};

23. *D* = {*z* : |*z* + *i*| *<* 1*,* −3*π/*4 ≤ arg *z* ≤ −*π/*4};

24. *D* = {*z* : |*z* − *i*| ≤ 1*,* −*π/*2 *<* arg (*z* − *i*) *< π/*4};

25. *D* = {*z* : *zz*¯ *<* 2*,* Re*z <* 1*,* Im*z >* −1};

26. *D* = {*z* : 1 *< zz*¯ *<* 2*,* Re*z >* 0*,* 0 ≤ Im*z* ≤ 1};

27. *D* = {*z* : |*z* − 1| *<* 1*,* arg *z* ≤ *π/*4*,* arg (*z* − 1) *> π/*4};

28. *D* = {*z* : |*z* − *i*| *<* 1*,* arg *z* ≥ *π/*4*,* arg (*z* + 1 − *i*) ≤ *π/*4};

29. *D* = {*z* : |*z* − 2 − *i*| ≥ 1*,* 1 ≤ Re*z <* 3*,* 0 *<* Im*z* ≤ 3};

30. *D* = {*z* : |Re*z*| ≤ 1*,* |Im*z*| *<* 2*,* |*z* − 2| *>* 2}*.*

**Задача 2.**  Найти все значения функции в указанной точке:

 1 + *i* −*i*

2

*.*

**Решение.** Данное выражение является значением многозначной функции *w* (*z*) = *z*−*i* в точке *z* = (1 + *i*) */*2. По определению имеем:

*z*−*i* = exp (−*i* Ln *z*) = exp [−*i* (ln |*z*| + *i* (arg *z* + 2*πk*))] *,*

где *k* = 0*,* ±1*,* ±2*, . .*

## Варианты задания 2

Вычислить все значения функции в указанной точке.

1. 32+*i*;

2. *i*1+*i*;

3. Ln (1 + *i*) ;

4. (− √2 ;

2)

5. 4*i*;

6. (3 + 4*i*)1+*i* ;

7. 1−*i* 1+*i* ;

√2

8. 1−*i* 1−*i* ;

√2

9. Ln (2 − 3*i*) ;

10. Ln (−2+3*i*)

11. cos (5 − *i*) ; 12. sin (15*i*)

13. tg (2 − *i*) ;

14. sh (−3 + *i*) ;

1. exp(exp *i*);
2. exp exp 1 +*πi* ;

2

17. cos (2 + *i*) ;

1. sin (2*i*) ;
2. ctg (2 + *i*)

4

20. cth (2 + *i*)