

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

Е.А. Благовещенская

**Методические указания
по выполнению практических заданий
по дисциплине
«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.13)**

для специальности
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации
«Информационная безопасность автоматизированных систем на
транспорте»
Форма обучения – очная

РАЗДЕЛ 7. ТЕОРИЯ ГРУПП И КОЛЕЦ

Санкт-Петербург 2023

Практическое занятие 15. Разложение абелевых групп.

Пример 1. Рассмотрим группу вычетов $A = \mathbb{Z}_{15}$. Тогда $n = 15 = 3 \cdot 5$, $A(3) = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\}$, $A(5) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}\}$. Изоморфизм $A(3) \oplus A(5) \rightarrow \mathbb{Z}_{15}$ можно задать следующим образом

$$(\overline{a}, \overline{b}) \rightarrow \overline{a+b}.$$

Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, то группа вычетов по модулю n раскладывается в прямую сумму примарных p -компонент следующим образом

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

Пример 2. Разложим группу вычетов \mathbb{Z}_{360} в прямую сумму своих примарных компонент. Поскольку $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, то

$$\mathbb{Z}_{360} \cong \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5.$$

Для того, чтобы разложить абелеву группу

$$\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_m}$$

в прямую сумму примарных циклических групп, нужно разложить каждое слагаемое этой группы.

Пример 3. Разложим группу

$$\mathbb{Z}_{756} \oplus \mathbb{Z}_{2250} \oplus \mathbb{Z}_{105}$$

в прямую сумму примарных циклических групп. Поскольку $756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$, $2250 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, то

$$\mathbb{Z}_{756} \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{27} \oplus \mathbb{Z}_7,$$

$$\mathbb{Z}_{2250} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{125},$$

$$\mathbb{Z}_{105} \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_7.$$

Поэтому

$$\mathbb{Z}_{756} \oplus \mathbb{Z}_{2250} \oplus \mathbb{Z}_{105} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{27} \oplus \mathbb{Z}_{125}.$$

Пример 4. Определим, изоморфны ли группы $\mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{225}$ и $\mathbb{Z}_{75} \oplus \mathbb{Z}_{45}$.

Поскольку $15 = 3 \cdot 5$, $225 = 9 \cdot 25$, то

$$\mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{225} \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{25}.$$

Далее, $75 = 3 \cdot 25$, $45 = 5 \cdot 9$. Поэтому

$$\mathbb{Z}_{75} \oplus \mathbb{Z}_{45} \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_9.$$

Поскольку разложения совпадают с точностью до перестановки слагаемых, группы изоморфны.

Пример 5. Определим, изоморфны ли группы $\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{225}$ и $\mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{135}$. Находим разложение каждой группы в прямую сумму примарных циклических групп.

$$\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{225} \cong \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{25},$$

$$\mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{135} \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{27}.$$

Примарные циклические группы не совпадают. Группы не изоморфны.

Число неизоморфных абелевых групп порядка p^n равно числу $p(n)$ разбиений числа n в сумму нескольких (возможно, одного) натуральных чисел

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_r, \text{ где } 1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r, 1 \leq r \leq n.$$

Например, существуют две неизоморфные абелевы группы порядка p^2 : \mathbb{Z}_{p^2} и $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.

$$p(3)=3, \text{ т.к. } 3=1+2=1+1+1.$$

$$p(4)=5, \text{ т.к. } 4=1+3=2+2=1+1+2=1+1+1+1.$$

$$p(5)=7, \text{ т.к. } 5=1+4=2+3=1+1+3=1+2+2=1+1+1+2=1+1+1+1+1.$$

Пример 6. Найдём число неизоморфных абелевых групп порядка 64. Поскольку $64=2^6$ и $6=1+5=2+4=3+3=1+1+4=1+2+3=2+2+2=1+1+1+3=1+1+2+2=1+1+1+1+2=1+1+1+1+1+1$, то $p(6)=11$. Поэтому существует 11 неизоморфных абелевых групп порядка 64.

Пример 7. Найдём число неизоморфных абелевых групп порядка 864. $864=3^3 \cdot 2^5$. Так как $p(3)=3$, $p(5)=7$, то абелевых групп порядка 864 существует $3 \cdot 7=21$.

Задачи.

Разложите в прямую сумму примарных циклических групп следующие группы

1. \mathbb{Z}_6 .

2. \mathbb{Z}_{12} .

3. \mathbb{Z}_{60} .

4. Сколько существует неизоморфных абелевых групп порядка: а) 36; б) 100; в) 64?

Выясните, изоморфны ли следующие группы.

5. $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{18}$?

6. $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{24}$?

7. $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{10}$ и $\mathbb{Z}_{60} \oplus \mathbb{Z}_{10}$?

Практическое занятие 16. Кольцо многочленов над полем комплексных и вещественных чисел.

ПРИМЕРЫ:

1. Найти $f + g$, где $f = x^2 - 2x + 3$, $g = x^3 - 3x + 1$.

Решение: Согласно определению суммы многочленов получаем:

$$f + g = (x^2 - 2x + 3) + (x^3 - 3x + 1) = (0 \cdot x^3 + x^2 - 2x + 3) + (x^3 + 0 \cdot x^2 - 3x + 1) = x^3 + x^2 - 5x + 4.$$

2. Найти $f \cdot g$, где $f = x^2 + x - 1$, $g = x + 3$.

Решение: По определению произведения многочленов имеем:

$$f \cdot g = (x^2 + x - 1) \cdot (x + 3) = (x^2 + x - 1) \cdot (0 \cdot x^2 + x + 3) = x^3 + 4x^2 + 2x - 3.$$

ПРИМЕРЫ:

1. Разложить многочлен f по степеням $x - \alpha$, где $f = x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 6x - 10$, $\alpha = 2$.

Решение: Для решения задачи применим схему Горнера. Заметим, что если многочлен f разложен по степеням $x - \alpha$, т.е. $f = a_0 + a_1(x - \alpha) + a_2(x - \alpha)^2 + \dots + a_n(x - \alpha)^n$, то a_0 — остаток при делении многочлена f на $x - \alpha$, a_1 — остаток при делении предыдущего частного на $x - \alpha$ и т.д.

	1	-3	5	-2	6	-10
2	1	-1	3	4	14	18
2	1	1	5	14	42	
2	1	3	11	36		
2	1	5	21			
2	1	7				
2	1					

Получили, что $a_0 = 18$, $a_1 = 42$, $a_2 = 36$, $a_3 = 21$, $a_4 = 7$, $a_5 = 1$, т.е. $f = (x - 2)^5 + 7(x - 2)^4 + 21(x - 2)^3 + 36(x - 2)^2 + 42(x - 2) + 18$.

2. Разложить по степеням x многочлен $f(x - 2)$, где $f = x^5 + x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 5$.

Решение: Для решения задачи можно в многочлене f заменить x на $x - 2$, но эта процедура будет очень громоздка. Поэтому здесь удобно применить схему Горнера. Разложим многочлен f по степеням $x + 2$.

	1	1	-2	4	-2	5
-2	1	-1	0	4	-10	25
-2	1	-3	6	-8	6	
-2	1	-5	16	-40		
-2	1	-7	30			
-2	1	-9				
-2	1					

$f = (x+2)^5 - 9(x+2)^4 + 30(x+2)^3 - 40(x+2)^2 + 6(x+2) + 25$. Если в полученном разложении заменить x на $x-2$, то получится искомое разложение $f(x-2) = x^5 - 9x^4 + 30x^3 - 40x^2 + 6x + 25$.

ПРИМЕРЫ:

1. Найти НОД(f, g), где $f = x^2(x^3 - 8)$, $g = x^5(x-2)^3(x+5)^2$.

Решение: Многочлен g разложен на линейные множители. Осталось разложить многочлен f на вещественные неразложимые множители: $f = x^2(x^3 - 8) = x^2(x-2)(x^2 + 2x + 4)$. Выбирая множители, входящие в оба разложения, получаем: $\text{НОД}(f, g) = x^2(x-2)$.

2. Найти НОД(f, g), где $f = x^5 - 2x^4 - 38x^3 + 4x^2 + 109x + 70$, $g = (x+1)^2(x^2 - 4)^3$.

Решение: Разложим многочлен g на линейные множители: $g = (x+1)^2(x^2 - 4)^3 = (x+1)^2(x+2)^3(x-2)^3$. Проверим по схеме Горнера, какие из этих множителей и с каким показателем степени входят в многочлен f :

	1	-2	-38	4	109	70
-1	1	-3	-35	39	70	0
-1	1	-4	-31	70	0	
-2	1	-6	-19	108		
2	1	-2	-35	0		
2	1	0	-35			

Сначала проверяем двучлен $(x+1)$. Оказалось, что $f : x+1$. Поскольку этот двучлен входит в многочлен g во второй степени, то надо проверить, делится ли многочлен f на $(x+1)^2$, т.е. делится ли $f_1 = f/(x+1)$ на $(x+1)$. Коэффициенты частного уже есть, поэтому их можно взять в качестве нового заголовка схемы Горнера. В записи это отмечается проведенной под ними чертой. Видно, что и $f_1 : x+1$. Дальнейшую делимость на $(x+1)$ проверять уже не надо, так как многочлен g не делится на $(x+1)^3$. Тогда проверяем следующий двучлен $(x+2)$. Проверку можно вести для частного $f_2 = f/(x+1)^2 = f_1/(x+1)$, коэффициенты которого уже получены. Видя, что $f_2(-2) \neq 0$, проверяем делимость на $(x-2)$ и получаем, что f_2 (а значит, и многочлен f) делится на $(x-2)$. Для проверки делимости на $(x-2)^2$ делим новое частное на $(x-2)$. В итоге получаем, что

многочлен f дважды делится на $(x+1)$ и один раз на $(x-2)$, следовательно, НОД $(f, g) = (x+1)^2(x-2)$.

3. Найти НОД(f, g), где $f = x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 20x^2 - 19x - 6$, $g = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$.

Решение: Поскольку не видно как разложить многочлены, то здесь удобно применить алгоритм Евклида. Делим с остатком многочлен f на многочлен g :

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 x^5 \\
 - \\
 x^5 \\
 \hline
 -2x^4 - 9x^3 - 16x^2 - 15x - 6 \\
 - \\
 -2x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 8x + 8 \\
 \hline
 -x^3 - 10x^2 - 23x - 14
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 \\
 \hline
 x - 2
 \end{array}
 \end{array}$$

Теперь надо делить многочлен g на полученный остаток. Если умножить предварительно остаток на (-1) это не поменяет НОД, но упростит вычисления.

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 x^4 \\
 - \\
 x^4 \\
 \hline
 -6x^3 - 20x^2 - 18x - 4 \\
 - \\
 -6x^3 - 60x^2 - 138x - 84 \\
 \hline
 40x^2 + 120x + 80
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 x^3 + 10x^2 + 23x + 14 \\
 \hline
 x - 6
 \end{array}
 \end{array}$$

Сокращаем полученный остаток на 40 и делим на него предыдущий делитель:

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 x^3 \\
 - \\
 x^3 \\
 \hline
 7x^2 + 21x + 14 \\
 - \\
 7x^2 + 21x + 14 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 x^2 + 3x + 2 \\
 \hline
 x + 7
 \end{array}
 \end{array}$$

Очередной остаток равен нулю, следовательно, последний делитель и есть НОД (f, g) , значит, $\text{НОД}(f, g) = x^2 + 3x + 2$.

4. Найти НОД(f, g), где $f = x^{40} + x^{35} + 1$, $g = x^{35} + x^{34} + 1$.

Решение: В этом случае вычисления по алгоритму Евклида будут очень громоздкими, поэтому здесь удобно воспользоваться следующим равенством:

$$d = \text{НОД}(f, g) = \text{НОД}(f - g, g), \quad f - g = x^{40} - x^{34} = x^{34}(x^6 - 1).$$

Поскольку x не входит множителем в многочлен f , то $d = \text{НОД}(x^6 - 1, g)$

.Многочлен $x^6 - 1$ имеет следующее разложение:

$x^6 - 1 = \prod_{k=1}^6 (x - \varepsilon_k)$, где ε_k — корни 6-й степени из 1. Осталось выяснить, которые из

ε_k являются корнями многочлена g .

$g(\varepsilon_k) = \varepsilon_k^{35} + \varepsilon_k^{34} + 1 = \varepsilon_k^{36} \varepsilon_k^{-1} + \varepsilon_k^{36} \varepsilon_k^{-2} + 1 = \varepsilon_k^{-1} + \varepsilon_k^{-2} + 1 = 0$, значит, $\varepsilon_k^2 + \varepsilon_k + 1 = 0$, т.е. ε_k — невещественный кубический корень из 1. Т.к. кубический корень из 1 является корнем 6-й степени из 1, то общими корнями многочлена $x^6 - 1$ и g будут ε и ε^{-1} — два невещественных кубических корня из 1, а следовательно, $\text{НОД}(f, g) = (x - \varepsilon)(x - \varepsilon^{-1}) = x^2 + x + 1$.

5. Найти вещественные корни многочлена

$$x^5 - (1-i)x^4 + (5+i)x^3 - (7-i)x^2 - (8-13i)x + 6 + 12i.$$

Решение: Пусть α является вещественным корнем данного многочлена. Тогда $\alpha^5 - (1-i)\alpha^4 + (5+i)\alpha^3 - (7-i)\alpha^2 - (8-13i)\alpha + 6 + 12i = 0$, и в виду вещественности α $\alpha^5 - \alpha^4 + 5\alpha^3 - 7\alpha^2 - 8\alpha + 6 = 0$, $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + 13\alpha + 12 = 0$, т.е. α есть общий корень многочленов $f = x^5 - x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 8x + 6$ и $g = x^4 + x^3 + x^2 + 13x + 12$, а значит, и корень $\text{НОД}(f, g)$.

Найдем $\text{НОД}(f, g)$ с помощью алгоритма Евклида:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} x^5 \\ -x^4 \quad +5x^3 \quad -7x^2 \quad -8x \quad +6 \\ \hline x^5 \\ +x^4 \quad +x^3 \quad +13x^2 \\ \hline -20x \end{array} & \begin{array}{l} x^4 + x^3 + x^2 + 13x + 12 \\ \hline x - 2 \end{array} \\ \begin{array}{r} -2x^4 \quad +4x^3 \quad -20x^2 \quad +6 \\ -2x^4 \quad -2x^3 \quad -2x^2 \quad -24 \\ \hline 6x^3 \quad -18x^2 \quad +6x \quad +30 \end{array} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} x^4 \\ +x^3 \quad +x^2 \quad +13x \quad +12 \\ \hline -3x^3 \quad +x^2 \quad +5x \\ \hline 4x^3 \quad +0x^2 \quad +8x \quad +12 \\ 4x^3 \quad -12x^2 \quad +4x \quad +20 \\ \hline 12x^2 \quad +4x \quad -8 \end{array} & \begin{array}{l} x^3 - 3x^2 + x + 5 \\ \hline x + 4 \end{array} \end{array}$$

Остаток легко раскладывается на множители: $12x^2 + 4x - 8 = 12(x - 2/3)(x + 1)$.

Проверим, не являются ли многочлены $(x - 2/3)$ и $(x + 1)$ множителями многочлена g , для чего применим схему Горнера:

	1	1	1	13	12
2/3	1	5/3	19/9	389/27	1750/81
-1	1	0	1	12	0

Итак, $\text{НОД}(f, g) = x + 1$, следовательно, искомый корень многочлена один и равен 1.

6. Найти $\text{НОД}(f, g)$ и его линейное представление, если $f = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$, $g = x^3 - 4x$.

Решение: Найдем НОД(f, g) с помощью алгоритма Евклида:

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 & x^3 - 4x \\
 - & \hline
 x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 & \\
 \hline
 -0x^3 - 4x^2 & \\
 - & x + 1 \\
 x^3 - 3x^2 - x & \\
 - & \hline
 x^3 - 0x^2 - 4x & \\
 \hline
 -3x^2 + 3x + 6 &
 \end{array}$$

После первого деления получили, что $f = (x+1)g - 3r_1$, где $r_1 = x^2 - x - 2$.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & x^2 - x - 2 \\
 - & \hline
 x^3 - 4x & \\
 \hline
 -x^2 - 2x & \\
 - & x + 1 \\
 x^2 - 2x & \\
 - & \hline
 x^2 - x - 2 & \\
 \hline
 -x + 2 &
 \end{array}$$

Результатом второго деления является $g = (x+1)r_1 - r_2$, где $r_2 = x - 2$.

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 & x - 2 \\
 - & \hline
 x^2 - x - 2 & \\
 \hline
 -2x & \\
 - & x + 1 \\
 x - 2 & \\
 - & \hline
 x - 2 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Получили, что $\text{НОД}(f, g) = x - 2$.

Теперь находим линейное представление $\text{НОД}(f, g)$. Для этого выражаем r_2 через g и r_1 , а потом выражаем r_1 через f и g :

$$r_2 = (x+1)r_1 - g = (x+1)\left(\frac{1}{3}(x+1)g - \frac{1}{3}f\right) - g = f\left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) + g\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right).$$

$$\text{Таким образом, } \text{НОД}(f, g) = x - 2 = f\left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) + g\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right).$$

7. Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби $\frac{2\alpha+1}{\alpha^2-2\alpha-1}$, где α – корень многочлена $f = x^3 + 2x - 2$.

Решение: Требование задачи означает, что нужно представить данную дробь в виде суммы неотрицательных и по возможности меньших степеней числа α с рациональными коэффициентами. Заметим, что показатели степеней должны быть меньше $\deg f = 3$, т.к. α^3 уже можно заменить на $-2\alpha + 2$.

Обозначим $g = x^2 - 2x - 1$, $h = 2x + 1$, тогда данная дробь представится в виде $\frac{h(\alpha)}{g(\alpha)}$.

Найдем многочлены u и v такие, чтобы $fu + gv = h$. Тогда $h(\alpha) = f(\alpha)u(\alpha) + g(\alpha)v(\alpha) = g(\alpha)v(\alpha)$, т.к. $f(\alpha) = 0$. Следовательно, $\frac{h(\alpha)}{g(\alpha)} = v(\alpha)$, и задача решена.

Для решения воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & x^2 - 2x - 1 \\
 - & \hline
 x^3 & \\
 \hline
 & +2x - 2 \\
 & \hline
 & x + 2 \\
 & \hline
 & 2x^2 + 3x - 2 \\
 - & \hline
 & 2x^2 - 4x - 2 \\
 \hline
 & 7x
 \end{array}$$

$$f = g(x+2) + 7r_1, \text{ где } r_1 = x.$$

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 & x \\
 - & \hline
 x^2 & \\
 \hline
 & -2x - 1 \\
 & \hline
 & -2x - 1 \\
 \hline
 & -1
 \end{array}$$

$g = r_1(x-2) - r_2$, где $r_2 = 1$. Тем самым, $\text{НОД}(f, g) = 1$. Найдем линейное представление $\text{НОД}(f, g)$:

$$r_2 = r_1(x-2) - g = \frac{1}{7}(f - g(x+2))(x-2) - g = f\left(\frac{1}{7}x - \frac{2}{7}\right) + g\left(-\frac{1}{7}x^2 - \frac{3}{7}\right).$$

$$v = \left(-\frac{1}{7}x^2 - \frac{3}{7}\right)h = \left(-\frac{1}{7}x^2 - \frac{3}{7}\right)(2x+1) = -\frac{2x^3 + x^2 + 6x + 3}{7}.$$

Для понижения степени достаточно из многочлена $2x^3 + x^2 + 6x + 3$ вычесть многочлен $2f$. Тогда

$$\frac{2\alpha + 1}{\alpha^2 - 2\alpha - 1} = -\frac{1}{7}(\alpha^2 + 2\alpha + 7).$$

ПРИМЕРЫ:

1. Найти кратность корня α в многочлене $f = x^7 - x^6 - 6x^5 + 2x^4 + 13x^3 + 3x^2 - 8x - 4$, $\alpha = -1$.

Решение: Для решения задачи воспользуемся схемой Горнера:

	1	-1	-6	2	13	3	-8	-4	
-1	1	-2	-4	6	7	-4	-4	0	- первый
-1	1	-3	-1	7	0	-4	0		- второй
-1	1	-4	3	4	-4	0			- третий
-1	1	-5	8	-4	0				- четвертый

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -6 & 14 & -18 \end{array}$$

Искомая кратность равна 4.

2. Найти при каких a и b многочлен $f = ax^7 + bx^5 - 2$ делится на $(x-1)^2$.

Решение: Условие задачи означает, что 1 – является корнем кратности не меньшей 2, что равносильно утверждению $f(1) = f'(1) = 0$.

Найдем f' : $f' = 7ax^6 + 5bx^4$, значения многочлена f и его производной f' при $x=1$: $f(1) = a + b - 2 = 0$, $f'(1) = 7a + 5b = 0$, откуда $a = -5$, $b = 7$.