ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

Е.А. Благовещенская

Методические указания
по выполнению практических заданий
по дисциплине
«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.13)

для специальности
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации
«Информационная безопасность автоматизированных систем на транспорте»
Форма обучения – очная

РАЗДЕЛ 6. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Санкт-Петербург 2023

Практическое занятие 13.
Действия в евклидовом пространстве.

Задача 1.

В пространстве $\mathbf{R}^4$ даны столбцы $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \overline{m}_3, \overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_3$.

1. Найти базис и размерность подпространства $M = <\overline{m}_1, \overline{m}_2, \overline{m}_3>$. Все векторы системы образующих подпространства M, не являющиеся базисными, разложить по найденному базису.
2. Найти базис и размерность подпространства $N = <\overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_3>$. Все векторы системы образующих подпространства N, не являющиеся базисными, разложить по найденному базису.
3. Найти базис и размерность подпространства $M + N$. Все векторы системы $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \overline{m}_3, \overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_3$, не являющиеся базисными, разложить по найденному базису.
4. Найти размерность подпространства $M \cap N$ и базис этого подпространства Доказать, что указанная совокупность векторов, действительно, является базисом подпространства $M \cap N$.
6. Написать систему линейных однородных алгебраических уравнений, задающих подпространство M.
7. Написать систему линейных однородных алгебраических уравнений, задающих подпространство N.
8. Написать систему линейных алгебраических уравнений, задающих подпространство $M \cap N$. Воспользовавшись этой системой, найти базис подпространства $M \cap N$.
9. Написать систему линейных алгебраических уравнений, задающих подпространство $M + N$.

Задача 2.

Пусть $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4$ --базис пространства X.

1.Исходя из определения докажите, что совокупность векторов $f = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4)$ является базисом пространства X. В результате получите критерий базиса (т.е. необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять система из n векторов n-мерного пространства (в терминах определителя), чтобы она была базисом).

2. Пользуясь критерием, полученным в п.1, докажите, что совокупность векторов $g = (\overline{g}_1, \overline{g}_2, \overline{g}_3, \overline{g}_4)$ является базисом пространства X.

3. Найдите матрицу перехода от базиса f к базису g. Сделайте проверку в векторной форме, т.е. выразите элементы базиса g через элементы базиса e, используя соответствующие элементы найденной матрицы.

4. Найдите матрицу перехода от базиса g к базису f. Сделайте проверку в векторной форме, т.е. выразите элементы базиса f через элементы базиса e, используя соответствующие элементы найденной матрицы.

5. Пусть $[\overline{x}]_f = (y_1\ y_2\ y_3\ y_4)^T$ --столбец координат вектора $\overline{x}$ в базисе f; $[\overline{x}]_g = (z_1\ z_2\ z_3\ z_4)^T$ --столбец координат вектора $\overline{x}$ в базисе g. В матричном и в

развёрнутом виде напишите формулы, выражающие столбец $[\bar{x}]_f$ через столбец $[\bar{x}]_g$.

6.В матричном и в развёрнутом виде напишите формулы, выражающие столбец $[\bar{x}]_g$ через столбец $[\bar{x}]_f$.

Пример 1. Пусть $\mathcal{X} = \boldsymbol{R}_n$, $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$, где $\vec{e}_i = (0 \ldots 0\,1\,0 \ldots 0)$ - строка, у которой на i-ом месте
стоит единица, $\vec{x} = (1\,2 \ldots n)$. Очевидно, справедливо равенство:

$\vec{x} = (1\,2 \ldots n) = 1 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + n \cdot \vec{e}_n$. Следовательно, $[\vec{x}]_e = (1\,2 \ldots n)^T$.

Пример 2. Пусть $\mathcal{X} = \mathbf{R}_2[t]$- пространство многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше второй. Любой многочлен этого пространства имеет вид: $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c \cdot 1$, где $a, b, c \in$ **R.**
Следовательно, совокупность $1, t, t^2$ - порождающая для пространства $\mathcal{X}$, т.е. $\mathcal{X} = < 1, t, t^2 >$.
Из равенства $a \cdot t^2 + b \cdot t + c \cdot 1 = 0$ и определения равенства многочленов следует, что $a = b = c = 0$. Следовательно, совокупность $e = (1, t, t^2)$ является линейно независимой, т.е. базисом пространства $\mathcal{X}$ и
$\dim \mathcal{X} = 3$. Покажем, что совокупность $e' = (1, t+1, (t+1)^2)$ также является базисом пространства $\mathcal{X}$.
Из формулы Тейлора для многочленов степени не более второй следует, что любой такой многочлен можно записать следующим образом:
$f(t) = f(-1) \cdot 1 + \dfrac{f'(-1)}{1!}(t+1) + \dfrac{f''(-1)}{2!}(t+1)^2$. Таким образом, совокупность
$e' = (1, t+1, (t+1)^2)$ - порождающая для пространства $\mathcal{X}$, причём $\dim \mathcal{X} = 3$.
Следовательно, по следствию к теореме 2 совокупность e' является базисом пространства $\mathcal{X}$. Подсчитаем матрицы перехода $C_{e \to e'}$ и $C_{e' \to e}$.
Очевидно, справедливы равенства:

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ t+1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ (t+1)^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot t + 1 \cdot t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}'_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \end{cases} \Leftrightarrow C_{e \to e'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Покажем, что пространство $\mathcal{X} = M_2$ (**C**) квадратных комплексных матриц порядка 2 является конечномерным комплексным пространством. Любая квадратная комплексная матрица A порядка 2 имеет вид: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, где $a_{ij} \in$ **C,**
$i, j = 1, 2$**.** Следовательно, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, и
совокупность матриц $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ является порождающей для пространства $\mathcal{X} = M_2$ (**C**). Следовательно, $\mathcal{X} = M_2$ (**C**) - конечномерное комплексное пространство.

Пример 4. Множество $\mathcal{X}_1 = \mathbf{C}_2$ комплексных строк длины 2 является комплексным линейным пространством, потому что такие строки можно складывать и умножать на комплексные числа, и при этом выполняются все 8 аксиом линейного пространства. Заметим, что пространство $\mathcal{X}$ из примера 4 и пространство $\mathcal{X}_1$ различные, несмотря на то, что как множества они равны.

Покажем, что совокупность строк $\vec{x}_1 = (2+i \quad 3-2i)$, $\vec{x}_2 = (-1+2i \quad 2+3i)$ этого пространства линейно зависимая. Действительно,
$i \cdot \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = (2i-1 \quad 3i+2) - (-1+2i \quad 2+3i) = (0 \quad 0) = \vec{0}$,
причём $i \neq 0, -1 \neq 0$.

Практическое занятие 14.
Ортогонализация Грамма-Шмидта.

Задача 1. Пусть $\mathcal{X} = M_n(\mathbf{K})$. Обозначим через P и Q множество всех симметричных и антисимметричных матриц пространства $\mathcal{X}$ соответственно, т.е. $P = \{A, A \in \mathcal{X} : A = A^T\}$; $Q = \{A, A \in \mathcal{X} : A = -A^T\}$.
Докажите, что P и Q - подпространства $\mathcal{X}$, $\mathcal{X} = P \oplus Q$. Для произвольной матрицы $A \in \mathcal{X}$ найдите
$pr_{P\parallel Q} A$.

Задача 2. Докажите, что для двух подпространств P и Q - конечномерного линейного пространства $\mathcal{X}$ одинаковой размерности существует общее прямое дополнение. Другими словами: если $\dim P = \dim Q$, то существует подпространство L линейного пространства $\mathcal{X}$ такое, что справедливы равенства $\mathcal{X} = P \oplus L$ и $\mathcal{X} = Q \oplus L$.

Задача 3. Пусть $\mathcal{X}$ - пространство свободных векторов на плоскости, т.е. $\mathcal{X} = \mathcal{V}_2$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - два неколлинеарные вектора этого пространства. Тогда $(\vec{a}, \vec{b})$ - базис $\mathcal{X}$.
Пусть $P = <\vec{a}>, Q = <\vec{b}>$.
Любой вектор $\vec{z} \in \mathcal{V}_2$ может быть единственным образом разложен по этому базису: $\vec{z} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, где
$\lambda\vec{a} \in P, \mu\vec{b} \in Q$. Следовательно, $\mathcal{X} = P \oplus Q$, подпространство Q является прямым дополнением подпространства P до пространства $\mathcal{X}$, $\lambda\vec{a} = pr_{P\parallel Q}\vec{z}$.