ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

Е.А. Благовещенская

Конспект лекций
по дисциплине
«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.13)

для специальности
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации
«*Безопасность автоматизированных систем на железнодорожном транспорте*»

Форма обучения – очная

РАЗДЕЛ 5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Санкт-Петербург 2023

Лекция 1. Определение геометрического вектора. Линейные операции над векторами.

Векторами (алгебраическими векторами) называются упорядоченные наборы n чисел ($n > 1$), для которых определены линейные операции. Эти числа (скаляры) называются компонентами или координатами вектора, n – размерностью вектора. Вектор может быть записан столбцом или строкой, например, $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ или $\bar{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$.

Два вектора равны, если у них одинакова размерность и их соответствующие координаты совпадают. Например, при $n = 2$

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x; \\ a_y = b_y. \end{cases}$$

Линейные операции (сложение и умножение на число) осуществляются с каждой компонентой вектора.

1. Сложение векторов: $\bar{a} + \bar{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$ или

$\bar{a} + \bar{b} = (a_x;\ a_y;\ a_z) + (b_x;\ b_y;\ b_z) = (a_x + b_x;\ a_y + b_y;\ a_z + b_z)$.

2. Умножение вектора на число λ:

$\lambda\bar{a} = \lambda\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \end{pmatrix}$ или $\lambda \cdot \bar{a} = \lambda \cdot (a_x;\ a_y;\ a_z) = (\lambda a_x;\ \lambda a_y;\ \lambda a_z)$.

Выражение

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n$$

называется линейной комбинацией векторов, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – коэффициенты линейной комбинации.

Два вектора, связанные равенством $\bar{b} = \lambda\bar{a}$, называются линейно зависимыми или к о л л и н е а р н ы м и. При размерности $n = 2$ для линейно зависимых векторов выполняется условие $\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = 0$, что эквивалентно системе $\begin{cases} b_x = \lambda a_x; \\ b_y = \lambda a_y. \end{cases}$ Если $\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \neq 0$, то векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются линейно независимыми и образуют б а з и с.

Любой вектор $\bar{d} = (d_x;\ d_y)$, может быть единственным образом разложен по векторам базиса, т.е. представлен линейной комбинацией векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$ или $\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$. Например, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, векторы $\bar{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют базис и вектор $\bar{d}$ можно записать следующим образом: $\bar{d} = d_x\bar{i} + d_y\bar{j}$ или $\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = d_x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d_y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Условие линейной зависимости можно также сформулировать следующим образом: векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ называются линейно зависимыми, если существуют не равные нулю постоянные α_1, α_2, при которых $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 = 0$. Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ являются линейно независимыми, если это равенство возможно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

В такой форме определение линейной зависимости и независимости может обобщено на любое число векторов одинаковой размерности ($n > 2$).

Определение. Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_k$ называются линейно зависимыми, если существуют такие постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю, при которых $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + ... + \alpha_k\bar{a}_k = 0$. Если это равенство возможно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k$, то векторы называются линейно независимыми.

Набор n линейно независимых векторов размерности n образуют базис.

Теорема. Любой вектор может быть единственным образом разложен по векторам базиса.

При размерности $n = 3$ для линейно зависимых векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ выполняется равенство $\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = 0$. Например, векторы $\bar{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют базис и вектор $\bar{d} = (d_x;\ d_y;\ d_z)$

можно записать следующим образом: $\bar{d} = d_x \bar{i} + d_y \bar{j} + d_z \bar{k}$ или $\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} = d_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Векторы в декартовой системе координат

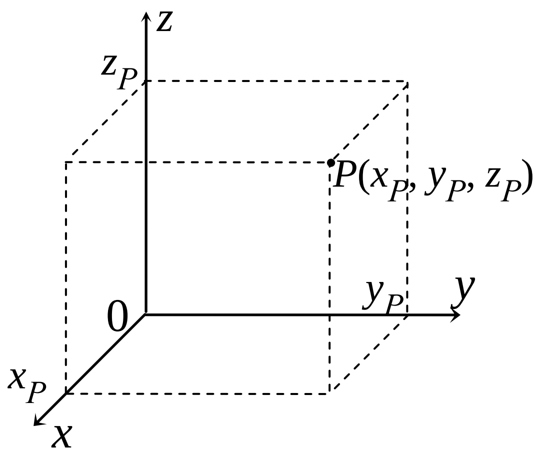

Рис.

Прямоугольная декартова система координат в пространстве образуется тремя взаимно перпендикулярными осями координат *Ox*, *Oy* и *Oz*, пересекающимися в точке *O*, начале координат (иногда обозначается 0). На каждой оси выбрано положительное направление (указывается стрелками), и единица измерения отрезков на осях. Положение точки *P* в пространстве определяется тремя координатами (рис.): абсциссой x_P, ординатой y_P и аппликатой z_P. На плоскости $0xy$ точка задается двумя координатами: абсциссой x_P, ординатой y_P.

Лекция 2. Базисы на плоскости и в пространстве. Координаты вектора относительно базиса.

Вектором (геометрическим вектором) называется направленный отрезок, граничные точки которого задают начало и конец вектора. На рисунке изображен вектор $\bar{a} = \overline{PF}$, с началом в точке *P* и концом в точке *F*. Вектор характеризуется модулем, который равен длине отрезка *PF* и направлением, которое задается лучом, исходящим из точки *P* и проходящим через точку *F*. Свободными называются векторы, допускающие параллельный перенос.

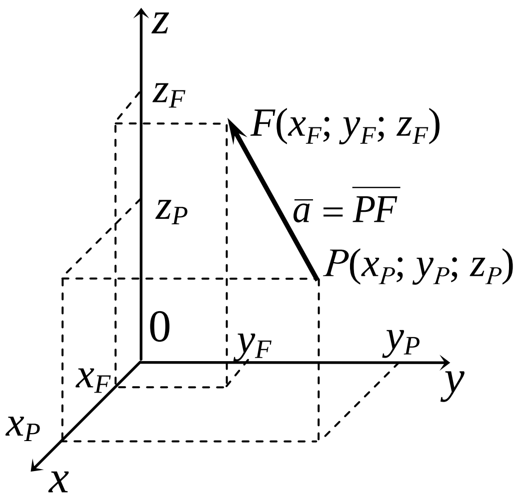

Рис.

Два свободных вектора считаются равными, если при совмещении их начал совпадут концы векторов. Равные векторы имеют одинаковую длину, лежат на параллельных (или совпадающих) прямых. Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется нулевым. Направление нулевого вектора не определено.

Свободный вектор $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ может быть задан алгебраически матрицей-столбцом (матрицей-строкой) проекций на координатные оси $\bar{a} = \overline{PF} = \begin{pmatrix} x_F - x_P \\ y_F - y_P \\ z_F - z_P \end{pmatrix}$, где $(x_P;\ y_P;\ z_P)$ и $(x_F;\ y_F;\ z_F)$ – координаты точек начала и конца вектора. Вектор на плоскости $0xy$ задается двумя проекциями. На рисунке изображены два равных вектора $\overline{PF}$ и $\overline{CD}$, у которых одинаковы проекции $\begin{pmatrix} x_F - x_P \\ y_F - y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$,

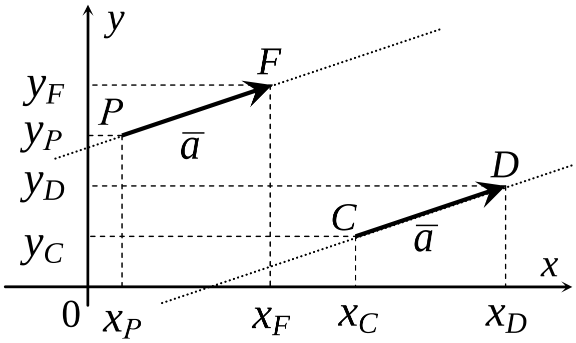

Рис.

Векторы, связанные равенством $\overline{b}=\lambda\overline{a}$, называются **коллинеарными**. Они линейно зависимы. При умножении вектора на число λ вектор $\overline{b}=\lambda\overline{a}$ сонаправлен с вектором $\overline{a}$ при $\lambda > 0$ и направлен противоположно при $\lambda < 0$. Модуль вектора $\lambda\overline{a}$ увеличивается в λ раз при $|\lambda| > 1$ и уменьшается при $|\lambda| < 1$.

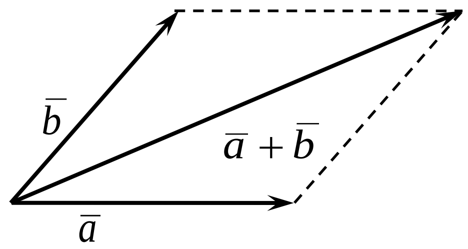

Рис.

Сумма двух неколлинеарных векторов, приведенных к общему началу, есть направленный отрезок, исходящий из общего начала и совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах (правило параллелограмма). Можно складывать свободные векторы по правилу треугольника, которое обобщается на любое количество слагаемых.

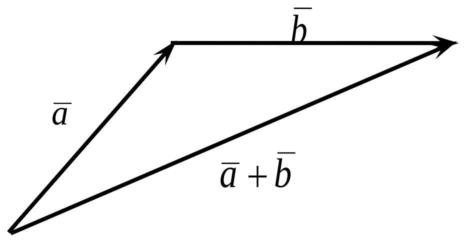

Рис.

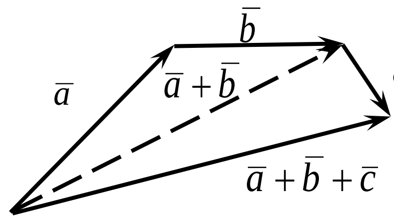

Рис.

На плоскости два неколлинеарных вектора образуют **базис**. Любой вектор $\overline{d}$ может быть единственным образом разложен по векторам базиса $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т.е. представлен линейной комбинацией векторов $\overline{d}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}$.

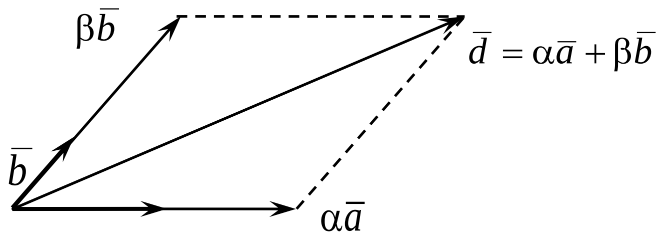

Рис.

Три вектора (или большее их число) называются компланарными, если они, будучи приведенными к общему началу, лежат в одной плоскости. Два вектора всегда компланарны. На рисунках изображены три компланарных вектора.

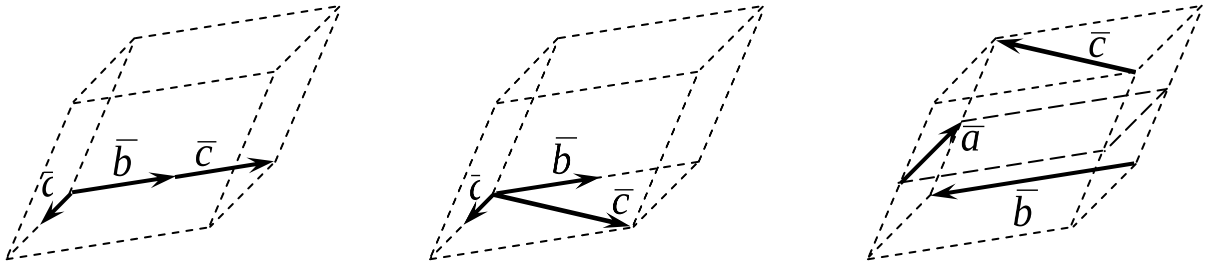

Рис.

Сумма трех некомпланарных векторов, приведенных к общему началу (рис.), есть вектор, совпадающий с диагональю параллелепипеда, построенного на этих векторах.

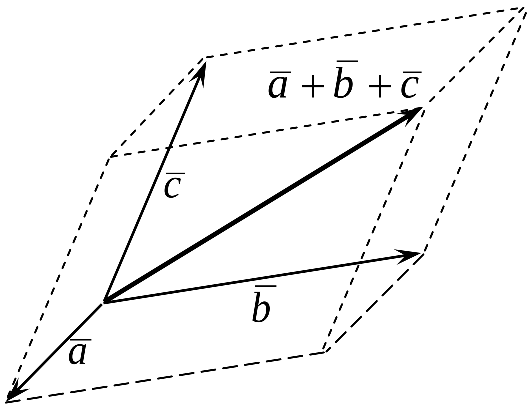

Рис.

В пространстве три некомпланарных вектора образуют базис. Любой вектор $\overline{d}$ может быть единственным образом разложен по векторам базиса $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, т.е. представлен линейной комбинацией векторов $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$ (рис.).

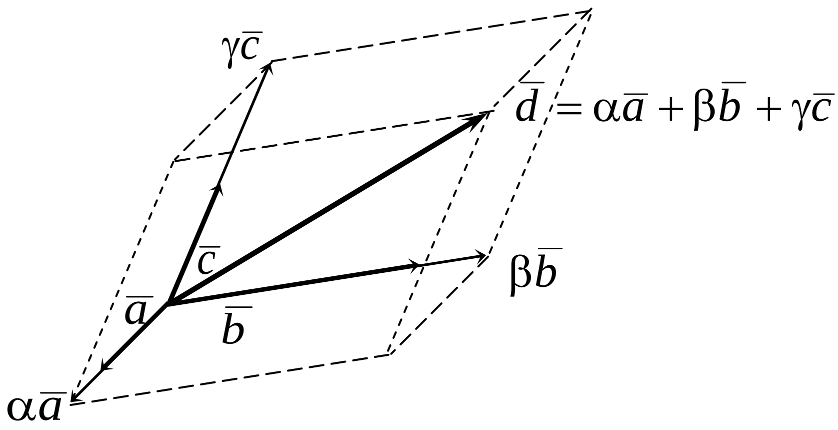

Рис.

Векторы, всегда принадлежащие одной прямой, называются скользящими. Наряду со свободными и скользящими векторами также рассматриваются векторы, которые характеризуются модулем, направлением и положением начальной точки, называемой точкой приложения. Радиус-вектор $\overline{r}_A$ точки A (рис), например, всегда имеет начало в точке O. Его проекции (компоненты) равны координатам точки A: $\overline{r}_A = \overline{OA} = (a_x;\ a_y;\ a_z) = (x_A;\ y_A;\ z_A)$.

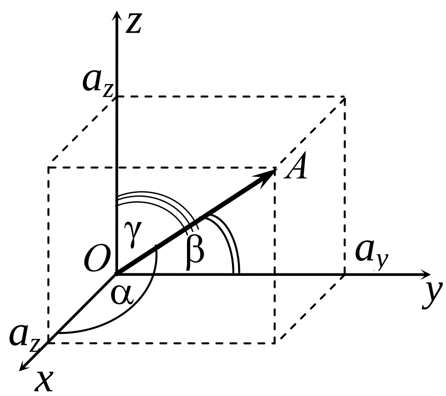

Рис. 1

Вектор $\overline{OA}$ на плоскости $0xy$ (рис.) задается двумя координатами: $\overline{a} = (a_x;\ a_y) = (x_A;\ y_A)$.

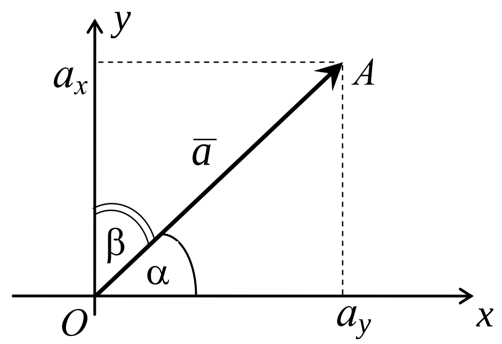

Рис.

Модуль радиуса-вектора (длина отрезка OA): $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Модули свободных и скользящих векторов вычисляются по этой же формуле. Орт – вектор, длина которого равна единице. Например, $\overline{a}_o = \dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$ – орт (нормированный вектор), направленный одинаково с исходным вектором. Если в качестве базиса использовать орты координатных осей (рис.) $\overline{i} = (1;\, 0;\, 0); \overline{j} = (0;\, 1;\, 0); \overline{k} = (0;\, 0;\, 1)$, то вектор $\overline{OA} = \overline{a} = (a_x;\, a_y;\, a_z)$ может быть представлен в виде $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$
.

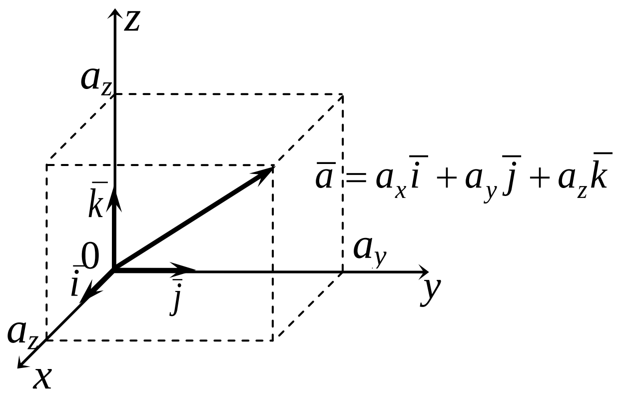

Рис.

Направляющие косинусы радиуса-вектора

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}$$

определяют (рис.) его направление; $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Направляющие косинусы свободных и скользящих векторов вычисляются по этим же формулам.

Вектор $\overline{a} = \overline{AB}$, заданный координатами точек (рис.) его начала $A(x_A;\, y_A;\, z_A)$ и конца $B(x_B;\, y_B;\, z_B)$, связан с радиус-векторами этих точек: $\overline{r}_B = \overline{r}_A + \overline{a}$.

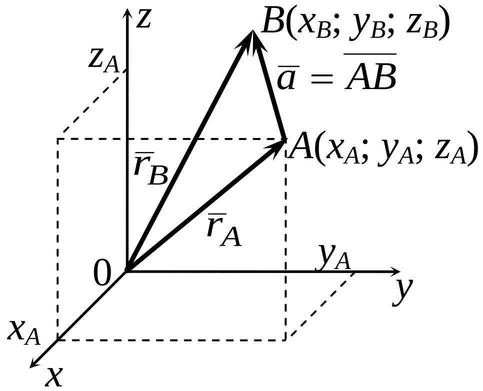

Рис.

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \overline{r}_B - \overline{r}_A = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

Лекция 3. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве.

Векторы в декартовой системе координат

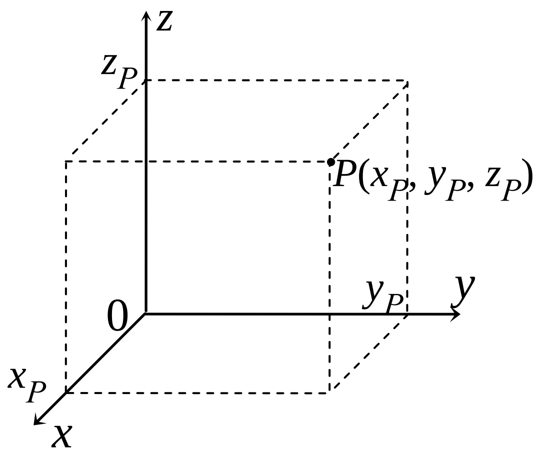

Рис.

Прямоугольная декартова система координат в пространстве образуется тремя взаимно перпендикулярными осями координат *Ox*, *Oy* и *Oz*, пересекающимися в точке *O*, начале координат (иногда обозначается 0). На каждой оси выбрано положительное направление (указывается стрелками), и единица измерения отрезков на осях. Положение точки *P* в пространстве определяется тремя координатами (рис.): абсциссой x_P, ординатой y_P и аппликатой z_P. На плоскости $0xy$ точка задается двумя координатами: абсциссой x_P, ординатой y_P.

Лекция 4. Определение скалярного произведения векторов и его свойства. Выражение скалярного произведения через координаты. Связь арифметического и геометрического векторов.

Скалярное произведение векторов

Векторы применяются для описания физических величин, которые характеризуются числовым значением и направлением: сил, скоростей и т.п. Углом между векторами называется угол φ $(0 \le \varphi \le \pi)$, образованный лучами, определяющими направление векторов с общим началом. Если угол между векторами равен $\pi/2$, то векторы называются ортогональными.

Скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$ – это число равное $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Условие перпендикулярности (ортогональности) векторов: $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$. Нулевой вектор ортогонален любому вектору.

Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами: $\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_x; a_y; a_z) \cdot (b_x; b_y; b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Свойства скалярного произведения (k – $const$):

$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ (коммутативность);

$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$ (дистрибутивность);

$k(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (k\bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (k\bar{b})$ (ассоциативность относительно скалярного множителя).

Скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{a}$ равно квадрату модуля вектора $|\bar{a}|$. (квадрату длины a вектора): $\bar{a} \cdot \bar{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\bar{a}|^2 = a^2$.

Косинус угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

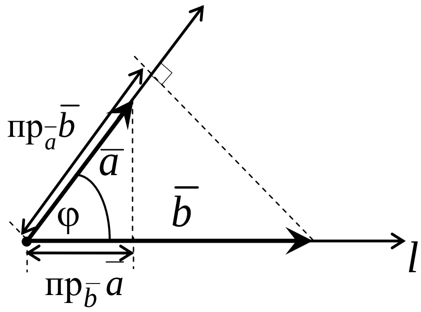

Рис.

Проекцией пр$_{\bar b}\,\bar a$ вектора $\bar a$ на ось l, сонаправленную с вектором $\bar b$, называется величина $|\bar a|\cdot\cos\varphi$ (рис.). Тогда пр$_{\bar b}\,\bar a = \dfrac{\bar a\cdot\bar b}{|\bar b|}$ и верны равенства: $\bar a\cdot\bar b = |\bar b|\cdot$ пр$_{\bar b}\bar a = |\bar a|\cdot$ пр$_{\bar a}\bar b$. Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол – прямой. Линейные операции над векторами приводят к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов: пр$_{\bar b}(\bar a+\bar c)=$ пр$_{\bar b}\,\bar a +$ пр$_{\bar b}\,\bar c$; пр$_{\bar b}(\lambda\cdot\bar a)=\lambda\cdot$ пр$_{\bar b}\,\bar a$.

Лекция 5. Основные задачи аналитической геометрии на плоскости.

Расстояние d между точками$M_1(x_1;\, y_1)$ и $M_0(x_0;\, y_0)$:

$d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$

Точка $M^*(x^*;\, y^*)$ пересечения прямых L_1 и L_2: $\begin{cases} A_1x^*+B_1y^*+C_1=0; \\ A_2x^*+B_2y^*+C_2=0. \end{cases}$

Расстояние h от точки $M_1(x_1;\, y_1)$ до прямой $A_1x + B_1y + C_1 = 0$:

$$h=\frac{|A_1x_1+B_1y_1+C_1|}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}}}$$

Лекция 6. Прямая линия на плоскости. Различные виды ее уравнений.

Прямая на плоскости

$\bar N = (A;\, B)$ – нормальный вектор прямой L ($\bar N\perp L$), $A^2 + B^2 \neq 0$;
$\bar R = (l;\, m)$ – направляющий вектор прямой L ($\bar R\,||\,L$), $l^2 + m^2 \neq 0$;
$M_0(x_0;\, y_0)$, $M(x;\, y)$ – точки прямой L (рис. 1).

Вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ перпендикулярен $\bar{N} : \bar{N} \cdot \overline{M_0M} = 0$; уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, перпендикулярно вектору $\bar{N}(A; B)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

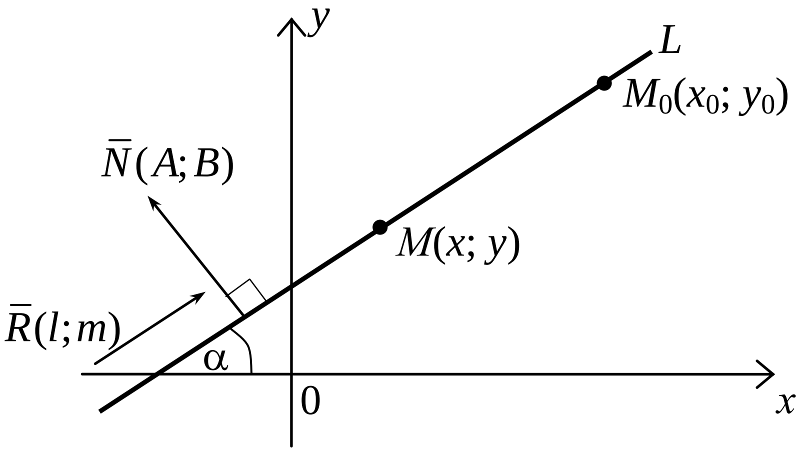

Рис. 1

Общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$, где $C = -Ax_0 - By_0$.

Частные случаи расположения прямой:

$B = C = 0$, $A \neq 0$ – прямая совпадает с осью $0y$;

$A = C = 0$, $B \neq 0$ – прямая совпадает с осью $0x$;

$A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ – прямая параллельна оси $0x$;

$B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$ – прямая параллельна оси $0y$;

$C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат.

Вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ параллелен $\bar{R}$: $\overline{M_0M} = t \cdot \bar{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = t \cdot l; \\ y - y_0 = t \cdot m; \end{cases}$

параметрические уравнения прямой (t – параметр): $\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$

Каноническое уравнение прямой: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$.

Замечание. Наличие в уравнении прямой нулевого знаменателя означает, что соответствующая проекция направляющего вектора прямой равна нулю.

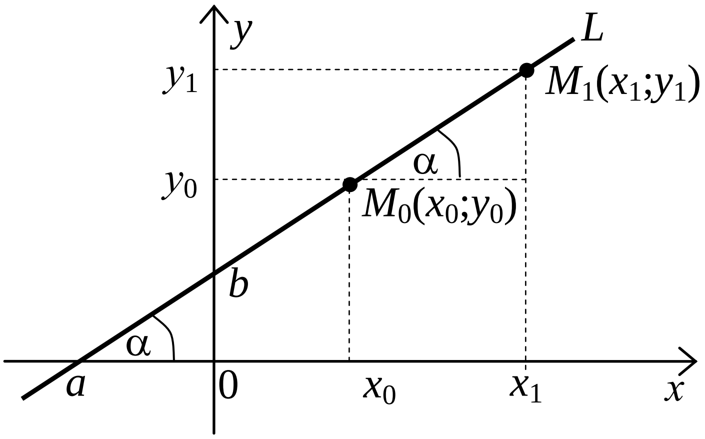

Рис. 2

Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (рис. 2).

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_0(x_0;\, y_0)$, $M_1(x_1;\, y_1)$:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

Угловой коэффициент прямой $k=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\operatorname{tg}\alpha$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку M_0 $(x_0;\, y_0)$: $y=k(x-x_0)+y_0$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $(0;\, b)$: $y = kx + b$.

Расстояние d между точками$M_1(x_1;\, y_1)$ и $M_0(x_0;\, y_0)$:

$$d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\,.$$

Лекция 7. Условия параллельности и перпендикулярности прямых линий.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку M_0 $(x_0;\, y_0)$: $y=k(x-x_0)+y_0$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $(0;\, b)$: $y = kx + b$.

Расстояние d между точками$M_1(x_1;\, y_1)$ и $M_0(x_0;\, y_0)$:

$$d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\,.$$

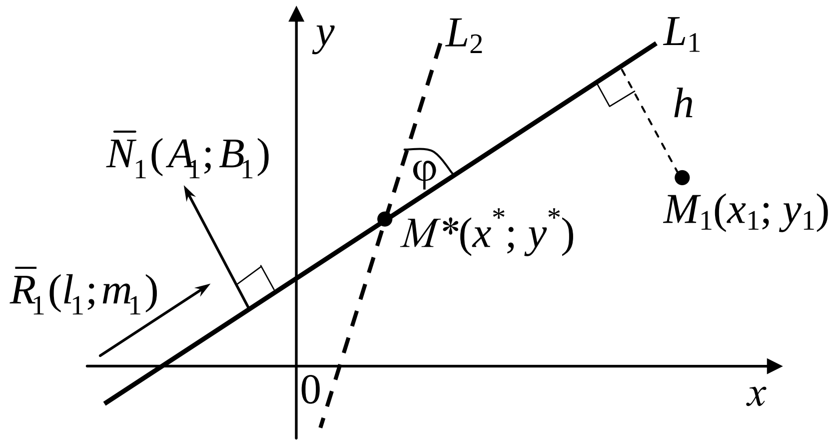

Рис. 3

Косинус угла φ между прямыми: $\cos\varphi = \dfrac{\left|\bar{R}_1 \cdot \bar{R}_2\right|}{\left|\bar{R}_1\right| \cdot \left|\bar{R}_2\right|} = \dfrac{\left|\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2\right|}{\left|\bar{N}_1\right| \cdot \left|\bar{N}_2\right|}$,

$\bar{R}_1, \bar{R}_2$ –направляющие векторы, $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ – нормальные векторы;

Тангенс угла между прямыми L_1 и L_2: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$ (рис. 3);

Условие параллельности прямых ($L_1 \| L_2$): $k_1 = k_2$ или $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$;

Условие перпендикулярности ($L_1 \perp L_2$): $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$ или $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Точка $M^*(x^*;\ y^*)$ пересечения прямых L_1 и L_2: $\begin{cases} A_1x^* + B_1y^* + C_1 = 0; \\ A_2x^* + B_2y^* + C_2 = 0. \end{cases}$

Расстояние h от точки $M_1(x_1;\ y_1)$ до прямой $A_1x + B_1y + C_1 = 0$:

$$h = \frac{\left|A_1x_1 + B_1y_1 + C_1\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Пример. Записать различные уравнения прямой L, изображенной на рисунке

Уравнение прямой в отрезках: $\dfrac{x}{(-2)} + \dfrac{y}{1} = 1$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки: $\dfrac{x - 0}{-2 - 0} = \dfrac{y - 1}{0 - 1}$.

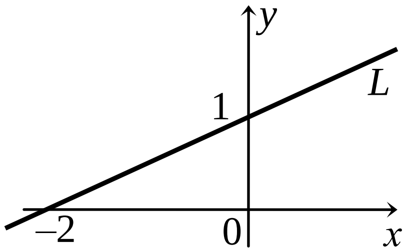

Рис. 4

Направляющий вектор прямой: $\bar{R} = (l;\, m) = (-2 - 0;\, 0 - 1) = (-2;\, -1)$;
каноническое уравнение прямой: $\dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y-0}{-1}$.
Общее уравнение прямой: $x - 2y + 2 = 0$.
Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = 0{,}5\,x + 1$.
Пример. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точки (0; 0) и (–2; 1).

Угловой коэффициент прямой: $k = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{1-0}{-2-0} = -\dfrac{1}{2}$.

Пример. Записать общее уравнение прямой, проходящей через точки $A(4;\, 1)$, $B(5;\, 3)$, найти отрезки a и b,отсекаемые этой прямой на осях, угловой коэффициент прямой и тангенс угла между ней и прямой $3x - y - 3 = 0$, координаты точки пересечения M^* этих прямых.

Уравнение прямой L, проходящей через точки A и B: $\dfrac{x-4}{5-4} = \dfrac{y-1}{3-1}$;

Общее уравнение прямой L: $2x - y - 7 = 0$.

Уравнение прямой L в отрезках: $\dfrac{x}{3{,}5} + \dfrac{y}{-7} = 1$; $a = 3{,}5$; $b = -7$.

Уравнение L с угловым коэффициентом: $y = 2x - 7$; $k = \mathrm{tg}\alpha = 2$.
Угловой коэффициент прямой $3x - y - 3 = 0$: $k_1 = 3$.
Тангенс угла φ с между прямыми $3x - y - 3 = 0$ и $2x - y - 7 = 0$:
$\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{k_1 - k}{1 + k_1 k} = \dfrac{3-2}{1+3\cdot 2} = \dfrac{1}{7}$.

Точка пересечения прямых: $\begin{cases} 2x^* - y^* - 7 = 0; \\ 3x^* - y^* - 3 = 0. \end{cases}$. Отсюда $x^* = -4$; $y^* = -15$.

Пример. Записать уравнения прямых, проходящих через точку (3; 2), параллельно и перпендикулярно прямой $y = 0{,}5\,x + 1$.
Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через

точку M_0 (x_0; y_0): $y = k(x - x_0) + y_0$.
Угловой коэффициент прямой y = 0,5 x + 1: k = 0,5.
Условие параллельности прямых: k_1 = k = 0,5.
Уравнение прямой с угловым коэффициентом k_1: $y = 0,5(x-3)+2$ или $y = 0,5x + 0,5$.

Условие перпендикулярности прямых: $k_2 = -\dfrac{1}{k} = -\dfrac{1}{0,5} = -2$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k_2: $y = -2(x-3)+2$ или $y = -2x + 8$.

Пример. Найти длину и уравнение высоты PH треугольника FPR, где $F(-1;5)$, $P(2;-5)$, $R(2;6)$.

Уравнение прямой FR: $\dfrac{x+1}{2+1} = \dfrac{y-5}{6-5}$ или $x - 3y + 16 = 0$.

$\overline{FR} = \bar{i} - 3\bar{j}$ – нормальный вектор прямой FR и направляющий вектор прямой PH.

Уравнение прямой PH: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+5}{-3}$ или $3x + y - 1 = 0$.

Расстояние от точки (x_0; y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$:
$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Расстояние от точки P до прямой FR:
$$|PH| = \frac{|1\cdot 2 - 3\cdot(-5) + 16|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{33}{\sqrt{10}} = 3,3\sqrt{10} \approx 10,44$$

Лекция 8. Плоскость.

Плоскость

M_0(x_0; y_0; z_0), M(x; y; z) – точки плоскости (рис. 12).

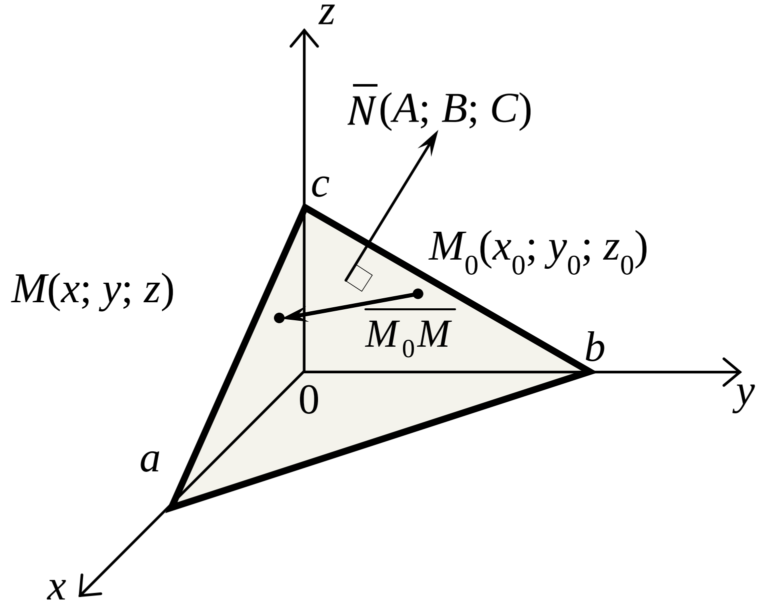

Рис. 12

$\bar{N}\,(A;\,B;\,C)$ – нормальный вектор (перпендикуляр) плоскости;
$M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$, $M(x;\,y;\,z)$ – точки плоскости (рис. 12);
$\overline{M_0M}\ (x-x_0;\,y-y_0;\,z-z_0)$ – вектор, расположенный в плоскости;
вектор $\overline{M_0M}$ перпендикулярен $\bar{N}$: $\bar{N}\cdot\overline{M_0M}=0$.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$, перпендикулярно вектору $\bar{N}$: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Уравнение плоскости в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (рис. 12).

Общее уравнение плоскости: $Ax+By+Cz+D=0$.

Частные случаи расположения плоскости:

$D=0$ – плоскость проходит через начало координат;
$A=0$ и $D\neq 0$ – плоскость параллельна (рис. 13) оси $0x$;

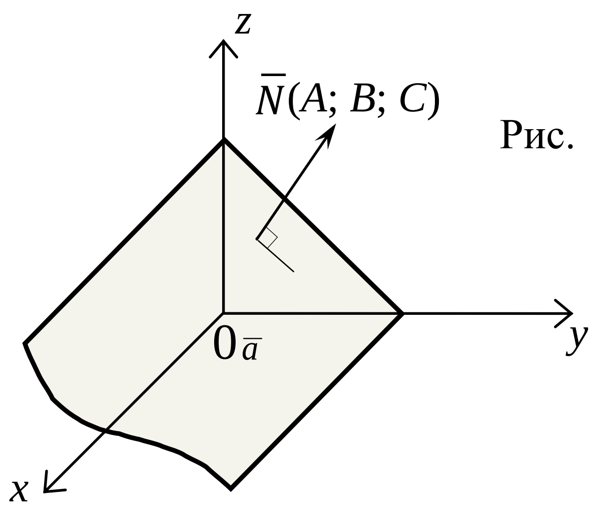

Рис. 13

Рис.13

$B=0$ и $D\neq 0$ – плоскость параллельна оси $0y$;
$C=0$ и $D\neq 0$ – плоскость параллельна оси $0z$;
$A=0$ и $D=0$ – плоскость проходит через ось $0x$;
$B=0$ и $D=0$ – плоскость проходит через ось $0y$;
$C=0$ и $D=0$ – плоскость проходит через ось $0z$;
$B=0$, $C=0$ и $D\neq 0$ – плоскость параллельна $0yz$ и перпендикулярна $0x$;
$A=0$, $C=0$ и $D\neq 0$ – плоскость параллельна $0xz$ и перпендикулярна $0y$;
$A=0$, $B=0$ и $D\neq 0$ – плоскость параллельна $0xy$ и перпендикулярна $0z$;
$A=0$, $B=0$, $D=0$ – плоскость $0xy$;
$A=0$, $C=0$, $D=0$ – плоскость $0xz$;
$B=0$, $C=0$, $D=0$ – плоскость $0yz$.

Расстояние d между точками $M_1(x_1;\,y_1;\,z_1)$ и $M_2(x_2;\,y_2;\,z_2)$:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,.$$

Расстояние h от точки $M_0(x_1;\, y_1;\, z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$h=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Косинус угла φ между плоскостями: $\cos\varphi=\dfrac{|\bar{N}_1\cdot\bar{N}_2|}{|\bar{N}_1|\cdot|\bar{N}_2|}$,

где $\bar{N}_1, \bar{N}_2$ – нормальные векторы этих плоскостей.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$, $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$, $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ параллельно вектору $\bar{a}(a_x;a_y;a_z)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}=0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ параллельно векторам $\bar{a}(a_x;a_y;a_z)$ и $\bar{b}(b_x;b_y;b_z)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0.$$

Пример. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки (1; 0; 0), (0; 2; 0) и (0; 0; 3).

Рассмотрим два способа.

1) $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0-1 & 2-0 & 0-0 \\ 0-1 & 0-0 & 3-0 \end{vmatrix}=0$ – уравнение плоскости, проходящей через три точки. Раскрывая определитель, находим

$6x + 3y + 2z - 6 = 0$ – общее уравнение плоскости.

2) Плоскость отсекает на осях (рис. 12) отрезки $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

Уравнение плоскости в отрезках: $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1.$

Пример. Найти косинус угла между плоскостями $x - 4y - 8z - 3 = 0$ и $2x - y - 2z + 4 = 0$.

$\overline{N}_1 = (1; -4; -8)$; $\overline{N}_2 = (2; -1; -2)$;

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2\right|}{\left|\overline{N}_1\right| \cdot \left|\overline{N}_2\right|} = \frac{\left|1 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) + (-8) \cdot (-2)\right|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-8)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{22}{27}.$$

Пример. Определить положение плоскости $3x + 4z - 5 = 0$ в пространстве.

В уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ коэффициенты $B = 0$ и $D \neq 0$.

Плоскость $3x + 4z - 5 = 0$ параллельна оси $0y$.

Пример. Определить положение плоскости $2y + 5 = 0$ в пространстве.

В уравнении $2y + 5 = 0$ коэффициенты $A = 0$, $C = 0$, $B \neq 0$, $D \neq 0$.

Плоскость $2y + 5 = 0$ перпендикулярна оси $0y$ и параллельна плоскости $0xz$.

Пример. Вывести уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

Произвольная точка $M(x; y; z)$ лежит в одной плоскости с точками M_0, M_1, M_2, если векторы

$$\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0),$$
$$\overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0),$$
$$\overline{M_0M_2} = (x_2 - x_0; y_2 - y_0; z_2 - z_0)$$

компланарны и их смешанное произведение равно нулю.

Уравнение плоскости: $$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Замечание. Через три точки пространства $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость.

Лекция 9. Прямая в пространстве.

Прямая в пространстве

Направляющий вектор прямой: $\overline{R}(l; m; n)$;

$M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M(x; y; z)$ – точки прямой (рис. 14).

Вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ коллинеарен $\overline{R}$: $\overline{M_0M} = t \cdot \overline{R}$;

параметрические уравнения прямой (t – параметр): $$\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt; \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Канонические уравнения прямой: $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$.

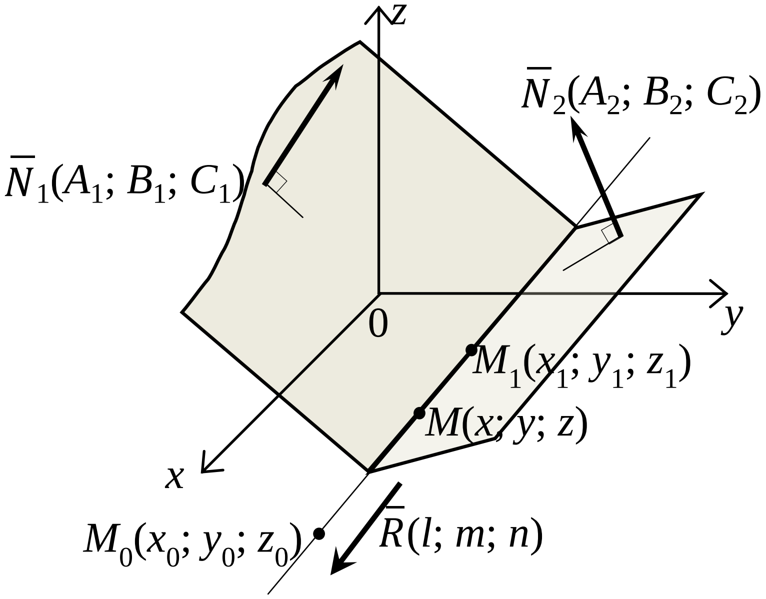

Рис. 14

Направляющий вектор прямой, проходящей через точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$: $\overline{R}\,(x_1-x_0; y_1-y_0; z_1-z_0)$;

Уравнения прямой, проходящей через две точки $M_o(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$: $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$.

Косинус угла между прямыми: $\cos\varphi=\dfrac{\left|\overline{R}_1\cdot\overline{R}_2\right|}{\left|\overline{R}_1\right|\cdot\left|\overline{R}_2\right|}$,

$\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ – направляющие векторы прямых.

Две пересекающиеся плоскости (рис. 14) $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0;\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ с нормальными векторами $\overline{N}_1(A_1;\ B_1;\ C_1)$ и $\overline{N}_2(A_2;\ B_2;\ C_2)$ задают в пространстве прямую с направляющим вектором $\overline{R}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2$.

Синус угла α (рис. 15) между прямой L с направляющим вектором $\overline{R}(l;m;n)$ и плоскостью P с нормальным вектором $\overline{N}\,(A; B; C)$:

$$\sin\alpha=\frac{\left|\overline{R}\cdot\overline{N}\right|}{\left|\overline{R}\right|\cdot\left|\overline{N}\right|}=\frac{\left|l\cdot A+m\cdot B+n\cdot C\right|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

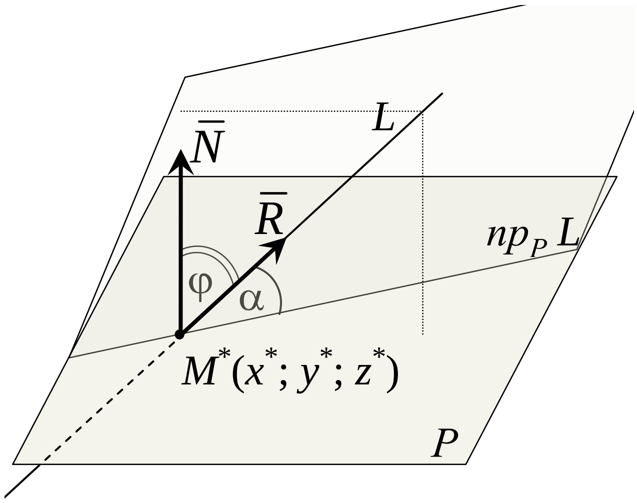

Рис. 15

Перпендикулярность прямой L и плоскостиP: $\overline{R}\|\overline{N}$ при $\dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}$.

Параллельность прямой L и плоскости P: $\overline{R}\perp\overline{N}$ при $Al + Bm + Cn = 0$.

Пример. Записать уравнения прямой с направляющим вектором: $\overline{R}$ (1; 2; 3), проходящей через точкуB(4; 5; 6).

Канонические уравнения прямой: $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-6}{3}$.

Пример. Записать уравнения прямой, перпендикулярной плоскости $2x + 3y - z - 5 = 0$ и проходящей через точкуB(2; 0; –1).

Нормальный вектор $\overline{N}$ плоскости является направляющим вектором $\overline{R}$ прямой: $\overline{R}$ = $\overline{N}$ = (2; 3; –1).

Канонические уравнения прямой: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-0}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Пример. Записать уравнение плоскости, перпендикулярной прямой $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-0}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$ и проходящей через точкуB(2; 0; –1).

Направляющий вектор прямой $\overline{R}$ является нормальным вектором плоскости $\overline{N}:\overline{N}$ = $\overline{R}$ = (2; 3; –1).

уравнение плоскости: $2(x-2) + 3y - (z + 1) = 0$.

Пример. Записать уравнения прямой, образованной пересечением плоскостей $5x + 3y + 4z - 8 = 0$ и $2x + y - 1 = 0$.

Нормальные векторы плоскостей: $\overline{N}_1$(5; 4; 3) и $\overline{N}_2$(2; 1; 0). Направляющий вектор прямой:

$$\bar{R} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\bar{i} + 6\bar{j} - 3\bar{k} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решая совместно уравнения плоскостей, фиксируя, например, $x = 0$, находим точку прямой: $x = 0$, $y = 1$, $z = 5/4 = 1{,}25$.

Канонические уравнения прямой: $\dfrac{x-0}{4} = \dfrac{y-1}{6} = \dfrac{z-1{,}25}{-3}$.

Пример. Найти координаты точки M^* пересечения прямой $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{8}$ и плоскости $x + 2y - 2z - 9 = 0$ и синус угла α между прямой и плоскостью (рис. 15).

Параметрические уравнения прямой: $x = 1 - 4t$, $y = -2 + t$, $z = 3 + 8t$.

После подстановки x, y, z в уравнение плоскости: $-18t - 18 = 0$; $t = -1$.

Координаты точки M^* пересечения прямой и плоскости:

$x^* = 1 - 4t\big|_{t=-1} = 1 - 4(-1) = 5$, $y^* = -2 - 1 = -3$, $z^* = 3 + 8(-1) = -5$.

Нормальный вектор плоскости $x + 2y - 2z - 9 = 0$: $\bar{N}\,(1;\,2;\,-2)$;

$$\sin\alpha = \frac{|\bar{R}\cdot\bar{N}|}{|\bar{R}|\cdot|\bar{N}|} = \frac{|-4\cdot 1 + 1\cdot 2 + 8\cdot(-2)|}{\sqrt{(-4)^2+1^2+8^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}.$$

Пример. Определить положение прямой в пространстве, если она проходит через две точки с равными ненулевыми аппликатами.

$z_0 \neq 0$, $n = 0$ в уравнении прямой $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$.

Направляющий вектор $(l;\, m;\, 0)$ перпендикулярен орту $\bar{k}$ $(0;\,0;\,1)$.

Прямая перпендикулярна оси $0z$ и параллельна плоскость $x0y$.

Лекция 10. Кривые второго порядка.

Лекция 11. Поверхности второго порядка.

Линии второго порядка на плоскости

Общее уравнение линии второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Эллипс – множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек плоскости (фокусов) F_1 и F_2 постоянна (рис. 4.8): $r_1 + r_2 = 2a$.

Каноническое уравнение эллипса в прямоугольной декартовой системе координат, ось абсцисс которой проходит через точки F_1, F_2, ось ординат – через середину отрезка F_1F_2:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$,

$2c$ – расстояние между фокусами,

a – большая полуось эллипса,

b – малая полуось эллипса.

Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$.

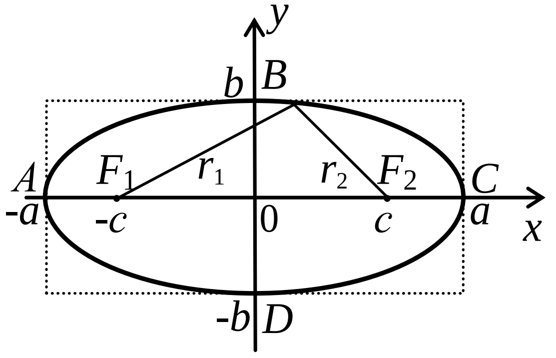

Рис. 4.8

Окружность – множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра). Частный случай эллипса ($c = 0$, $\varepsilon = 0$), соответствующий совмещению фокусов.

Уравнение окружности: $x^2 + y^2 = r^2$ или $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$,

где r – радиус, x_0, y_0 – координаты центра окружности.

Гипербола – множество точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек плоскости (фокусов) F_1 и F_2 постоянна (рис. 4.9): $|r_1 - r_2| = 2a$.

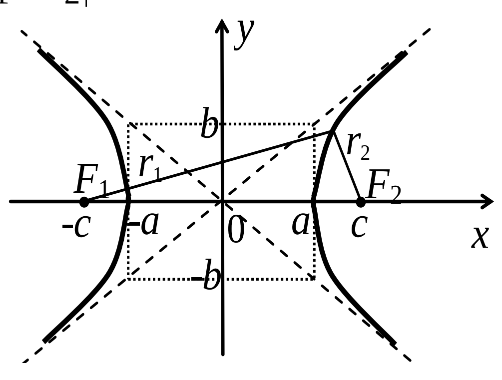

Рис. 4.9

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$,
$2c$ – расстояние между фокусами;
прямая, проходящая через точки $F_1 F_2$ – действительная ось гиперболы;
прямая $0y$ – мнимая ось гиперболы.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$.

При $a = b$ гипербола называется равносторонней. При повороте системы координат на 45^{O} уравнение равносторонней гиперболы имеет вид $y = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{x}$.

Парабола– множество точек плоскости, равноудаленных ($d = r$) от данной точки плоскости (фокуса) F и данной прямой l (директрисы) $x = -\frac{p}{2}$ (рис. 4.10).

Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px,\ (p > 0)$.

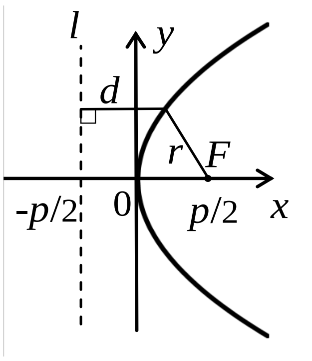

Рис. 4.10

Пример. Найти радиус R окружности $x^2 + y^2 + 8x + 12 = 0$.
$x^2 + y^2 + 8x + 12 = (x+4)^2 - 16 + y^2 + 12$; $(x+4)^2 + y^2 = 4$; $R = 2$.

Пример. Найти эксцентриситет эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

$a^2 = 25$, $b^2 = 9$, $c^2 = a^2 - b^2 = 16$; $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

Пример. Найти расстояние между фокусами гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$.

Каноническое уравнение гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$;
$a^2 = 9$, $b^2 = 16$, $c^2 = a^2 + b^2 = 25$.
Расстояние между фокусами: $2c = 10$.

Пример. Определить тип линии $r = \dfrac{1}{1+\sin\varphi}$.

Переход к декартовой системе координат: $r = \dfrac{1}{1+\sin\varphi}$; $r = \dfrac{1}{1+\dfrac{y}{r}}$;

$r = \dfrac{r}{r+y}$; $r + y = 1$; $r^2 = (1-y)^2$; $x^2 + y^2 = y^2 - 2y + 1$; $y = \dfrac{1}{2}(1-x^2)$.

$r = \dfrac{1}{1+\sin\varphi}$ – парабола (рис. 4.11).

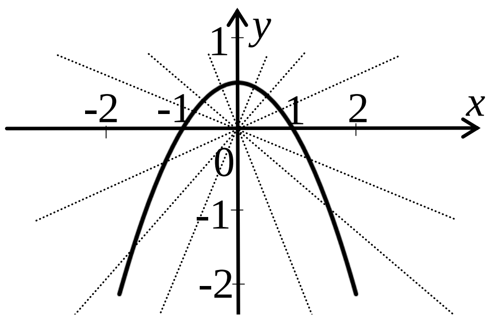

Рис. 4.11

Лекция 12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Собственные значения и собственные векторы матриц

Пусть **A** – квадратная матрица. Если существует ненулевой столбец **X** такой, что выполняется матричное равенство **AX** = λ**X**, то число λ называется собственным числом, а **X** – собственным столбцом (вектором) матрицы **A**. Для нахождения собственного вектора **X**, соответствующего λ, надо решить однородную систему уравнений **A** – λ**E** = 0 или

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Условие существования ненулевых решений системы определяется характеристическим уравнением

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Если **X** является собственным вектором, соответствующим собственному числу λ, то для любого числа $k \neq 0$ вектор $k\mathbf{X}$ – также собственный вектор, соответствующий λ.

Пример. Найти собственные числа матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение имеет вид $\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

Раскрывая определитель:
$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 15\lambda + 54) = (\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 9) = 0.$
Собственные числа матрицы **A**: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$.

Пример. Найти собственные столбцы (векторы) матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Сделать проверку.

Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$.

Собственные числа матрицы **A**: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$.
При $\lambda_1 = 2$ однородная система принимает вид:

$$\begin{cases} (5-2)x_1 - 3x_2 = 0 \\ 1x_1 + (1-2)x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Одно из ненулевых решений системы: $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$.

Собственный вектор матрицы **A** для $\lambda_1 = 2$: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Проверка. $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\lambda\mathbf{X} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = 4$ однородная система принимает вид:

$$\begin{cases}(5-4)x_1-3x_2=0\\ 1x_1+(1-4)x_2=0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}1x_1-3x_2=0\\ 1x_1-3x_2=0.\end{cases}$$

Одно из ненулевых решений системы: $x_1=3$ и $x_2=1$.

Собственный вектор матрицы **A** для $\lambda_2 = 4$: $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$.

Проверка. $\mathbf{A}\,\mathbf{X}=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ 4\end{pmatrix}$; $\lambda\mathbf{X}=4\cdot\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ 4\end{pmatrix}$.

Пример. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}$.

Собственные числа матрицы **A**: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

При $\lambda_1 = 1$ однородная система принимает вид:

$$\begin{cases}0x_1+\;\;x_2+\;\;x_3=0;\\ 0x_1+2x_2+\;\;x_3=0;\\ 0x_1+0x_2+3x_3=0.\end{cases}$$

Одно из ненулевых решений системы: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Собственный вектор матрицы **A** для $\lambda_1 = 1$: $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = 2$ однородная система принимает вид:

$$\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=0;\\ 0x_1+0x_2+x_3=0;\\ 0x_1+0x_2+x_3=0.\end{cases}$$

Одно из ненулевых решений системы: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

Собственный вектор матрицы **A** для $\lambda_2 = 2$: $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

При $\lambda_3 = 3$ однородная система принимает вид:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \quad + x_3 = 0; \\ \;\; 0x_1 \; - x_2 \quad + x_3 = 0; \\ \;\; 0x_1 + 0x_2 \; + 0x_3 = 0. \end{cases}$$

Одно из ненулевых решений системы: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 =$.

Собственный вектор матрицы **A** для $\lambda_3 = 3$: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.