ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

Е.А. Благовещенская

Конспект лекций
по дисциплине
«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.13)

для специальности
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации
«*Безопасность автоматизированных систем на железнодорожном транспорте*»

Форма обучения – очная

РАЗДЕЛ 4. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Санкт-Петербург 2023

Лекция 9. Матрицы. Типы матриц. Сложение матриц. Умножение матриц на число. Перемножение матриц.

Матрицы. Действия над матрицами

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица элементов, расположенных в m строках и n столбцах:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

i – номер строки, в которой расположен элемент ($1 \le i \le m$),

j – номер столбца, в котором расположен элемента a_{ij} ($1 \le j \le n$).

Величины m и n задают размерность матрицы. Матрица $\mathbf{A}_{nn}$, в которой число строк равно числу столбцов, называется квадратной. Матрица, у которой количество строк (столбцов) равно единице, называется матрицей-строкой (матрицей-столбцом) или вектором.

Равенство матриц: $\mathbf{A}_{mn} = \mathbf{B}_{mn} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}$.

Транспонирование матриц: $\mathbf{B}_{nm} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}_{mn} \quad \Leftrightarrow \quad b_{ij} = a_{ji}$.

Умножение матрицы на число λ: $\mathbf{B}_{mn} = \lambda \mathbf{A}_{mn} \quad \Leftrightarrow \quad b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Сложение матриц: $\mathbf{C}_{mn} = \mathbf{A}_{mn} + \mathbf{B}_{mn} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Операция умножения числовых матриц определена, когда число столбцов первого сомножителя совпадает с числом строк второго:

$$\mathbf{C}_{mn} = \mathbf{A}_{mp} \cdot \mathbf{B}_{pn} \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} .$$

Перестановочные матрицы – это матрицы, произведение которых коммутативно, т.е. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Квадратная матрица $\mathbf{E}$ называется единичной, если ее элементы

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ и $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A}$, если произведение матриц $\mathbf{E}$ и $\mathbf{A}$ определено.

Пример. Найти x_1 и x_2, если $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 2;\ \ x_2 = 5.$$

Лекция 10. Определители матриц и их свойства.

Определитель (детерминант) квадратной матрицы – число, которое может быть вычислено по ее элементам. Обозначается det**A**, D(**A**), Δ. Определитель матрицы первого порядка ($m = n = 1$) равен единственному элементу a_{11}. Определитель более высокого порядка может быть вычислен по рекуррентной формуле, содержащей миноры (определители низших порядков). Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы n-го порядка называется определитель $(n – 1)$-го порядка, полученный исключением i-й строки и j-го столбца определителя n-го порядка. Алгебраическим дополнением A_{ij} называется произведение $(–1)^{i+j}M_{ij}$.

Определитель n-го порядка Δ равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) и их алгебраических дополнений:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj},$$

причем результат не зависит от выбора строки (столбца) k.

Например, у матрицы второго порядка: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ алгебраические дополнения первой строки

$$A_{11} = (–1)^{1+1}a_{22} = a_{22};\quad A_{12} = (–1)^{1+2}a_{21} = –a_{21}.$$

Определитель этой матрицы равен сумме произведений элементов первой строки и их алгебраических дополнений:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{22}\cdot A_{11} = a_{11}\cdot a_{22} – a_{12}\cdot a_{21}.$$

Рисунок 2.2 иллюстрирует способ выбора сомножителей в каждом слагаемом определителя второго порядка.

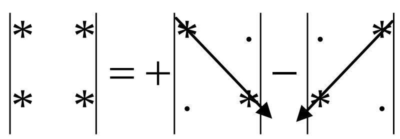

Рис. 2.2

Используя полученную формулу для определителя второго порядка, можно вывести формулу вычисления определителя матрицы третьего порядка: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Рисунок 2.3 иллюстрирует способ выбора сомножителей в каждом слагаемом формулы (правило треугольников).

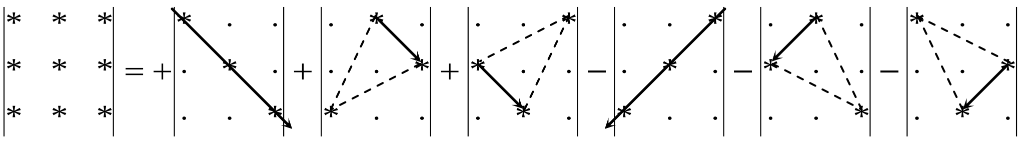

Рис. 2.3

Ниже перечислены основные свойства определителей.

Определитель не меняется при транспонировании, т.е. перемене местами строк и столбцов.

Определитель равен нулю, если содержит нулевую строку (столбец), одинаковые строки (столбцы), пропорциональные строки (столбцы).

Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) может быть вынесен за знак определителя.

Определитель меняет знак (но сохраняет абсолютную величину) при перемене местами любых двух строк (столбцов).

Определитель не меняется, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольное число, не равное нулю

Лекции 11-12.
Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и их решение.
Матричная форма записи СЛАУ.
Определение и вычисление обратной матрицы.

Обратная матрица

Если определитель квадратной матрицы отличен от нуля (det**A** $\neq 0$), то существует такая матрица $\mathbf{A}^{-1}$, что $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Матрица $\mathbf{A}^{-1}$ называется обратной матрице $\mathbf{A}$ и вычисляется по формуле:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{n2} \\ & & \cdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$.

Системы линейных уравнений

Система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

может быть записана в матричной форме $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$,

где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица системы;

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных;

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов системы.

Решением системы $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ является упорядоченный набор чисел α_1, α_2, …, α_n, подстановка которых (вместо x_1, x_2, …, x_n) во все уравнения системы, обращает их в тождество. Система уравнений, не имеющая решений, называется *несовместной*, в противном случае – *совместной*. Система называется *определённой*, если она имеет только одно решение и неопределённой, если имеет бесконечно много решений.

Расширенной матрицей системы называется матрица

$$\mathbf{A}^{\text{р}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & b_2 \\ .... & .... & .... & ..... & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Вертикальная черта, отделяющая столбец свободных членов, не является обязательной.

Лекция 13.
Решение систем линейных уравнений в матричной форме.
Формулы Крамера.

Система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

в которой число уравнений n равно числу неизвестных и определитель матрицы $\det\mathbf{A} = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$ называется крамеровской системой.

Единственное решение системы может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \; j = \overline{1, n},$$

где Δ_j – частные определители системы, получающиеся из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Лекции 14-15.
Элементарные преобразования СЛАУ.
Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений состоит в последовательном исключении неизвестных x_j в системе. Эти операции эквивалентны приведению расширенной матрицы системы $\mathbf{A}^{\mathrm{p}}$ к ступенчатой (прямой ход метода Гаусса) с помощью элементарных преобразований над строками $\mathbf{A}^{\mathrm{p}}$:

– перестановка местами двух строк, что соответствует перестановке двух уравнений системы;

– умножение элементов какой-либо строки матрицы на произвольное число $\lambda \neq 0$, что соответствует умножению уравнения системы на отличное от нуля число;

– прибавление к элементам какой-либо строки матрицы соответствующих элементов другой строки, что соответствует сложению двух уравнений системы.

При поиске решения возможны три случая, приведенных в таблице 2.1:

1) совместная и определённая система имеет единственное решение;

2) совместная и неопределённая система имеет бесконечно много решений;

3) несовместная система не имеет решений.

Таблица 2.1

Эквивалентная ступенчатая расширенная матрица системы	Пример
1. $\left(\begin{array}{cccc\|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ система имеет единственное решение
2. $\left(\begin{array}{ccccc\|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{r,n-1} & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$, $r < n$.	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ система имеет бесконечное множество различных решений

3. $\left(\begin{array}{cccc\|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \end{array}\right)$, $b_{r+1} \neq 0$.	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$ система не имеет решений

Обратный ход метода Гаусса состоит в замене нулями всех не диагональных элементов расширенной матрицы. После элементарных преобразований эквивалентная расширенная матрица системы задает систему линейных уравнений, имеющую те же решения (или не имеющая решений), что и исходная система.

Лекция 16.
Определение ранга матрицы и алгоритм вычисления ранга матрицы.

Ранг матрицы

Пусть в матрице **A** выбраны r строк и r столбцов. Минором порядка r называется определитель, составленный из чисел, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов. Любой минор матрицы порядка r называется базисным, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $r + 1$ равны нулю (или отсутствуют в матрице в случае, когда $r + 1 > m$ или $r + 1 > n$).

Рангом матрицы **A (**обозначение rang**A)** называется порядок базисного минора.

Преобразования матрицы, не меняющие ее ранга:
– транспонирование;
– умножение элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на произвольное число $\lambda \neq 0$;
– прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца);
– перестановка местами двух строк (столбцов);
– удаление нулевых строк (столбцов).

Теорема Кронекера–Капелли

Для того чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы системы,

$$\mathrm{rang}\mathbf{A} = \mathrm{rang}\mathbf{A}^{\mathrm{p}}.$$

Если ранг r матрицы совместной системы линейных уравнений равен числу неизвестных n, то система имеет единственное решение. Если ранг матрицы совместной системы линейных уравнений меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений. При этом $n - r$ неизвестным (свободным) можно присвоить любые значения. Остальные неизвестные (базисные), соответствующие столбцам базисного минора, вычисляются через свободные.

Однородные системы линейных уравнений

Система линейных уравнений **AX** = **B** называется однородной, если **B** = **0**:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, т. к. существует тривиальное (нулевое) решение $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$. Решения, отличные от тривиального, существуют, если $\mathrm{rang}\mathbf{A} < n$ (или $\det\mathbf{A} = 0$ при $m = n$).