ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

Е.А. Благовещенская

Методические указания
по выполнению практических заданий

по дисциплине

«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.13)

для специальности
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации
«Информационная безопасность автоматизированных систем на
транспорте»

Форма обучения – очная

РАЗДЕЛ 3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Санкт-Петербург 2023

Практическое занятие 8.
Представление комплексного числа в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Операции над комплексными числами.

Три формы записи комплексного числа

Пример. Установить геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\dfrac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} - 4 = 0$.

$z = x + iy;\ \overline{z} = x - iy;\ \operatorname{Re}\overline{z} = x;\ \operatorname{Im} z = y;\ \dfrac{x}{y} - 4 = 0; y = \dfrac{x}{4}.$

Пример. Найти вещественную часть числа z, если $|z| = 12$ и

$\arg z = \arccos\dfrac{1}{6}.$

$\varphi = \arg z = \arccos\dfrac{1}{6};\ \cos\varphi = \dfrac{1}{6};\ \operatorname{Re} z = |z|\cos\varphi = 2$.

Пример. Найти модуль комплексного числа z, если Imz = 10 и

$\arg z = \arcsin\dfrac{5}{6}.$

$\varphi = \arg z = \arcsin\dfrac{5}{6};\ \sin\varphi = \dfrac{5}{6};\ \operatorname{Im} z = |z|\sin\varphi;\ |z| = \dfrac{\operatorname{Im} z}{\sin\varphi} = 12.$

Пример. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -3 + 3i$ (рис. 1.2), записать его тригонометрическую и показательную формы.

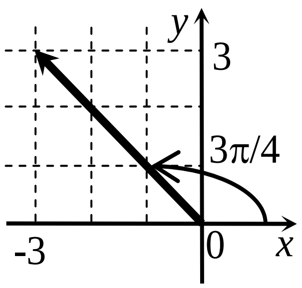

Рис. 1.2

$r = |z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$, $\arg z = \arccos\dfrac{-3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{3\pi}{4}.$

$z = 3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ – тригонометрическая форма.

$z = 3\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$ – показательная форма.

Пример. Вычислить $z+\bar{z}$, $z-\bar{z}$, $z\cdot\bar{z}$, $\bar{z}\,/\,|z|$, если $z=2+\sqrt{5}i$.

Для $z=2+\sqrt{5}i$ сопряженное комплексное число $\bar{z}=2-\sqrt{5}i$.

$z+\bar{z}=2+\sqrt{5}i+2-\sqrt{5}i=4$;

$z-\bar{z}=2+\sqrt{5}i-2+\sqrt{5}i=2\sqrt{5}i$;

$z\cdot\bar{z}=|z|^2=2^2+(\sqrt{5})^2=9,\ |z|=\sqrt{9}=3$;

$$\frac{\bar{z}}{|z|}=\frac{2-\sqrt{5}i}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}i.$$

Пример. Найти $z_1.z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 + i$.

$z_1\cdot z_2 = (1 - i)(2 + i) = 2 - 2i + i - i^2 = 2 - 2i + i + 1 = 3 - i$;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i-2i+i^2}{4-i^2}=\frac{1-3i}{4+1}=\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i.$$

Пример. Найти вещественную и мнимую части комплексного числа $z = (1 + i)^2$.

$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$.

Вещественную часть комплексного числа $z = (1 + i)^2$: $\mathrm{Re}z = 0$;

Мнимая часть комплексного числа $z = (1 + i)^2$: $\mathrm{Im}z = 2$.

Пример. Вычислить $2z-z^2$ при $z=-1+2i$.

$2z-z^2=2(-1+2i)-(-1+2i)^2=-2+4i-1+4i+4=1+8i$.

Пример. Найти z^2 и $\sqrt[3]{z}$, если $z = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ (рис. 1.2).

$$z^2=\left(3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2e^{i\frac{3\pi}{4}2}=18e^{i\frac{3\pi}{2}}=18\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=$$

$= 18(0 + i\,(-1)) = -18i$;

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\left(3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{18}e^{i\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}},\ (k = 0;\ 1;\ 2);$$

при $k = 0$: $z_1=\sqrt[6]{18}e^{i\frac{3\pi/4}{3}}=\sqrt[6]{18}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\approx 1{,}145 + i\cdot 1{,}145$;

при $k = 1$:

$z_2=\sqrt[6]{18}e^{i\frac{3\pi/4+2\pi}{3}}=\sqrt[6]{18}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)\approx -1{,}564 + i\cdot 0{,}419$;

при $k = 2$:

$z_3 = \sqrt[6]{18}e^{i\frac{3\pi/4+4\pi}{3}} = \sqrt[6]{18}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) \approx 0{,}419 - i\cdot 1{,}564.$

Пример. Доказать, что $\sqrt{-1} = \pm i$.

Комплексное число -1 имеет вид $z = -1 + 0i$.

$r = |z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$, $\varphi = \arg z = \arccos\frac{-1}{1} = \pi\cdot$

Формула $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right)$ при $n = 2$:

$$\sqrt{-1} = \sqrt{1}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{2}\right)\right).$$

При $k = 0$: $\sqrt{-1} = \sqrt{1}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{1}\cdot(0 + i\cdot 1) = i$;

при $k = 1$: $\sqrt{-1} = \sqrt{1}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{1}\cdot(0 - i\cdot 1) = -i$.

Пример. Решить уравнение $z^2 - 4z + 13 = 0$.

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 13}}{2\cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}\cdot i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Уравнение имеет комплексные корни $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 2 - 3i$.

Пример. Решить биквадратное уравнение $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$.

Обозначим $t = z^2$. Тогда $z^4 = t^2$.

Уравнение $t^2 - 3t - 4 = 0$ имеет корни $t = 4$ и $t = -1$.

После решения уравнений $z^2 = 4$ и $z^2 = -1$ получаем четыре корня биквадратного уравнения $z_1 = 2,\ z_2 = -2,\ z_3 = i,\ z_4 = -i$.

Пример. Доказать, что комплексные числа $a + bi$ и $a - bi$ являются корнями уравнения $z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0$.

Подстановка $z = a + bi$ в уравнение:

$$z^2 - 2az + a^2 + b^2 = (z - a)^2 + b^2 = (a + bi - a)^2 + b^2 = (bi)^2 + b^2 = 0.$$

Подстановка $z = a - bi$ в уравнение:

$$z^2 - 2az + a^2 + b^2 = (z - a)^2 + b^2 = (a - bi - a)^2 + b^2 = (-bi)^2 + b^2 = 0.$$

Пример. Доказать равенство $\cos^3\varphi = \frac{1}{4}\cos 3\varphi + \frac{3}{4}\cos\varphi$.

По формуле Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi$: $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\cdot\sin\varphi$.

$$\cos\varphi = \frac{\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi + \cos\varphi - i\cdot\sin\varphi}{2} = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}.$$

$$\cos^3\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3i\varphi} + 3e^{i\varphi} + 3e^{-i\varphi} + e^{-3i\varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}(\cos 3\varphi + i\cdot\sin 3\varphi + 3(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) +$$

$$+3(\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi) + \cos 3\varphi - i\cdot\sin 3\varphi) = \frac{1}{4}\cos 3\varphi + \frac{3}{4}\cos\varphi.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вычислите $(2 + 3i) + (-3 + 4i) - (3 - 2i)$.
   Ответ: $-4 + 9i$.

2. Вычислите $2z_1 - 3z_2$, если $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 + 3i$.
   Ответ: $-4 - 11i$.

3. Вычислите $(2+3i)\cdot(3+4i)$.
   Ответ: $-6 + 17i$.

4. Вычислите $(3 - 2i)\cdot(5 + 4i) - 7i + 1$.
   Ответ: $24 - 5i$.

5. Вычислите $(4 - 3i)\cdot(2 + 5i)\cdot(7i + 1)$.
   Ответ: $-75 + 175i$.

6. Вычислите $\frac{2+3i}{5+4i}$.
   Ответ: $\frac{22}{41} + \frac{7}{41}i$.

7. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = \frac{2}{1 - i\sqrt{3}} - 1$.
   Ответ: 1; $2\pi/3$.

8. Вычислите $2e^{iz}$ в точке $z = \pi - 2i$.

Ответ: $-2e^2$.

9. Запишите комплексное число $z = 1 + \dfrac{i}{1-i}$ в показательной форме.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

10. Запишите алгебраическую форму произведения $z_1 \cdot z_2$, где $z_1 = 2 \cdot e^{i\,\pi/4}$, $z_2 = 3 \cdot e^{i\,\pi/12}$.

Ответ: $6+6i$.

11. Вычислите $\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^6$.

Ответ: –1.

12. Вычислите i^{10}.

Ответ: 1.

13. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $(1+i)^5$.

Ответ: $4\sqrt{2}; -\dfrac{3\pi}{4}$.

14. Вычислите $\sqrt[3]{8i}$, сделайте проверку.

Ответ: $\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} + i; -2i$.

15. Установите геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $z \cdot \overline{z} - 2 \cdot \operatorname{Im} z + \operatorname{Re}(z^2) - 1 = 0$

Ответ: $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}$.

16. Докажите формулу $\sin^3\varphi = \dfrac{3}{4}\sin\varphi - \dfrac{1}{4}\sin 3\varphi$, применив формулу Эйлера.

17. Докажите формулу $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \dfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$, применив формулу Эйлера.

18. Решите уравнение $z^2 + 4z + 13 = 0$.

Ответ: $-2+3i$; $-2-3i$.

19. Решите уравнение $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$.
Ответ: 1; –1; $2i$; $-2i$.

20. Решите уравнение $(z^2 + 2z)^2 + 7(z^2 + 2z) + 10 = 0$.
Ответ: $-1+i$; $-1-i$; $-1+2i$; $-1-2i$.

21. Составьте квадратное уравнение с вещественными коэффициентами, корнем которого является комплексное число $3 + 4i$.
Ответ: $z^2 - 6z + 25 = 0$.