ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

Е.А. Благовещенская

Конспект лекций

по дисциплине

«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.13)

для специальности
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации
«*Безопасность автоматизированных систем на железнодорожном транспорте*»

Форма обучения – очная

РАЗДЕЛ 3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Санкт-Петербург 2023

Лекция 8.
Поле комплексных чисел. Представление комплексного числа в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Операции над комплексными числами.
§1. Понятие комплексного числа

Определение 1: Комплексными числами называются упорядоченные пары вещественных чисел (a, b) с установленными для них понятием равенства (1) и операциями сложения (2) и умножения (3).

(1) Два комплексных числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ равны тогда и только тогда, когда одновременно $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

(2) Суммой комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число $z = (a, b)$, такое что $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$.

(3) Произведением комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число $z = (a, b)$, где $a = a_1 a_2 - b_1 b_2$, $b = a_1 b_2 + a_2 b_1$.

Нетрудно видеть, что из определения суммы и произведения комплексных чисел, вытекают законы сложения

a) переместительный: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$,
b) сочетательный: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$;

и законы умножения

a) переместительный: $z_1 z_2 = z_2 z_1$,
b) сочетательный: $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$,
c) распределительный относительно сложения: $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

Определение 2: Первое число a пары (a, b) комплексного числа z называется действительной частью[1] и обозначается символом $a = \Re e\, z$.

Определение 3: Второе число b пары (a, b) комплексного числа z называется мнимой частью[2] и обозначается $b = \Im m\, z$.

Если отождествить вещественное число a с комплексным числом $(a, 0)$, то тем самым множество комплексных чисел можно рассматривать как расширение множества вещественных чисел. Но в отличие от множества действительных чисел, множество комплексных чисел не обладает свойством упорядоченности. Заметим, что умножение на действительную единицу $(1, 0)$ не меняет комплексного числа: $z \cdot 1 = z$.

[1] $\Re e$ – начальные буквы латинского слова *realis (действительный).*
[2] $\Im m$ – начальные буквы латинского слова imaginarius (мнимый).

Определение 4: Комплексное число $(0,1)$ называется мнимой единицей, и его обозначают i: $(0,1)=i$.

Из определения произведения комплексных чисел вытекает, что $i^2=-1$.

Определение 5: Комплексное число вида $(0,b)$ называется чисто мнимым.

Чисто мнимое число можно рассматривать как произведение мнимой единицы $(0,1)$ и действительного числа $(b,0)$, т.е. $(0,b)=ib$.

§2. Алгебраическая форма

Определения чисто мнимой и вещественной части комплексного числа позволяют записать любое комплексной число в следующем виде:

$$z=(a,b)=a+i\,b.$$

Такая запись комплексного числа в виде называется алгебраической формой комплексного числа z, где

$$a=\Re e\,(z),\quad b=\Im m\,(z).$$

Определение 6: Комплексное число $a-i\,b$ называется сопряженным комплексным числом к комплексному числу $z=a+i\,b$, и обозначается как $\bar{z}=\overline{a+i\,b}$.

Заметим, что $\overline{(\bar{z})}=z$, т.к. $\overline{(\bar{z})}=\overline{a-i\,b}=a+i\,b=z$. Отметим еще две очевидные формулы

$$z+\bar{z}=2a;\qquad z-\bar{z}=2ib.$$

Для алгебраической записи комплексного числа операции сложения и произведения перепишутся следующим образом:

$$z_1+z_2=(a_1+i\,b_1)+(a_2+i\,b_2)=(a_1+a_2)+i\,(b_1-b_2);$$

$$z_1\cdot z_2=(a_1+i\,b_1)\cdot(a_2+i\,b_2)=(a_1\,a_2-b_1b_2)+i\,(a_1\,b_2-a_2\,b_1).$$

Операция вычитания комплексных чисел определяется как операция обратная сложению. Таким образом, комплексное число $z=a+i\,b$ является разностью комплексных чисел $z_1=a_1+i\,b_1$ и $z_2=a_2+i\,b_2$, если $a=a_1-a_2$, $b=b_1-b_2$, т.е.

$$z_1-z_2=(a_1+ib_1)-(a_2+ib_2)=(a_1-a_2)+i\,(b_1-b_2).$$

Операция деления комплексных чисел, аналогично операции вычитания, определяется как обратная операция произведения. Комплексное число $z=a+i\,b$ называется частным комплексных чисел $z_1=a_1+i\,b_1$ и $z_2=a_2+i\,b_2\neq 0$, если $z_1=z\cdot z_2$. С другой стороны, деление комплексных чисел всегда можно заменить их умножением, умножив и делимое и делитель на число, сопряженное делителю, в результате чего получим

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\,\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

§3. Геометрическая форма.

Для геометрического изображения комплексных чисел проще всего воспользоваться точками или векторами плоскости, в которой выбрана какая-либо декартова прямоугольная система координат. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется плоскостью Гаусса. Таким образом, действительные числа будут изображаться точками оси Ox (которая называется действительной осью), чисто мнимые – точками оси Oy (мнимая ось). Следовательно, комплексному числу $z = a + ib$ соответствует точка плоскости (x, y) с декартовыми координатами $x = a$, $y = b$. При этом устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех комплексных чисел и множеством точек комплексной плоскости. Аналогично можно связать множество комплексных чисел с множеством радиус-векторов (т.е. множеством векторов, начало которых помещено в начале координат).

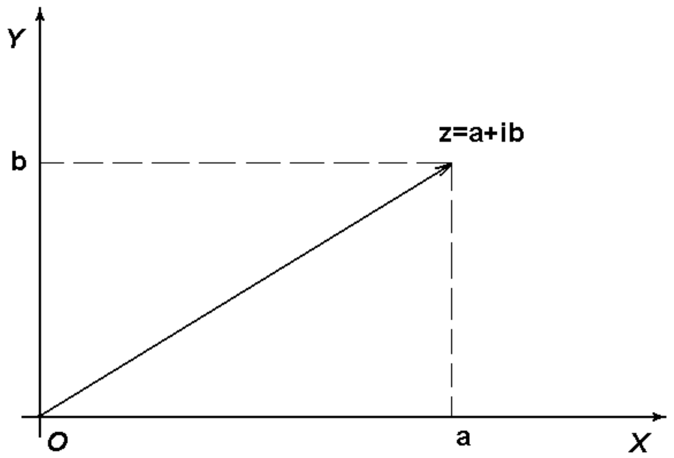

Рис. 1

С помощью векторной интерпретации можно наглядно проиллюстрировать операции сложения и вычитания комплексных чисел. Суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2 будет являться вектор, равный сумме векторов z_1 и z_2 (рис. 2);

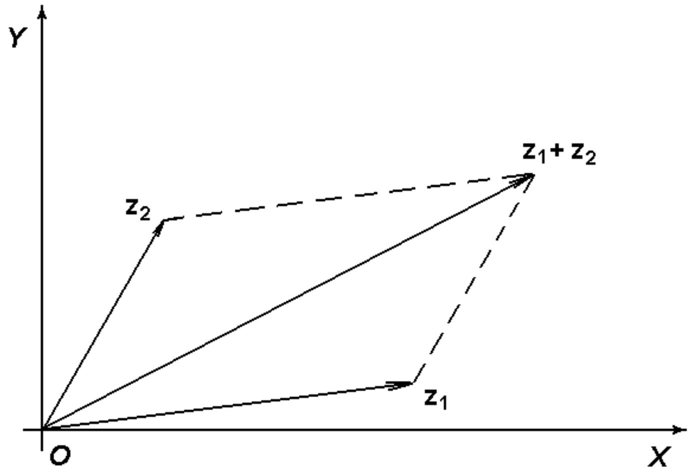

Рис. 2

для разности $(z_1 - z_2)$ – вектор, равный сумме векторов z_1 и $(-z_2)$ (рис. 3).

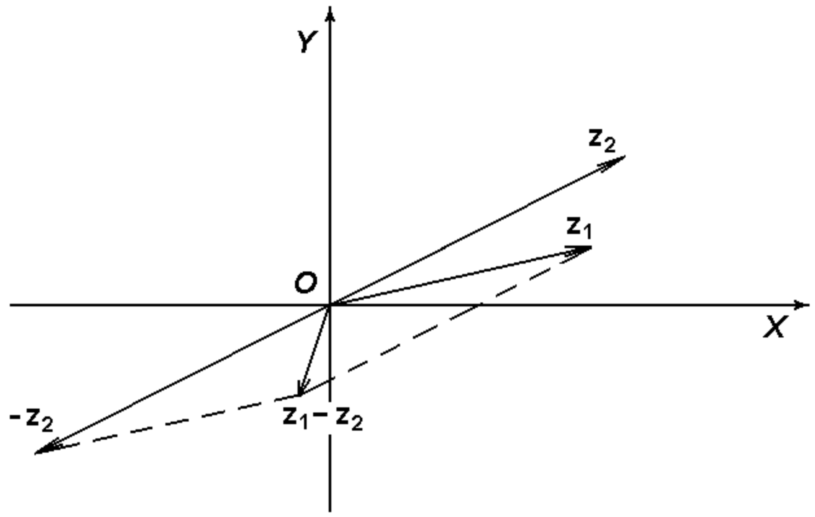

Рис. 3

Точно также можно показать геометрический смысл сопряженного числа $\bar{z}$. Это будет вектор, полученный из вектора z с помощью зеркального отражения от оси Ox (рис. 4).

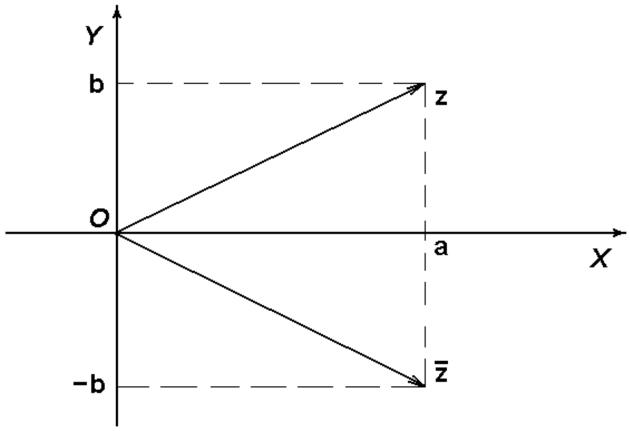

Рис. 4

Определение 7: <u>Модулем</u> $|z|$ комплексного числа называется длина r вектора z.

Определение 8: <u>Аргументом</u> $Arg\,z$ комплексного числа z $(z \neq 0)$ называется ориентированный (против часовой стрелки) угол φ между осью Ox и вектором z (рис. 5).

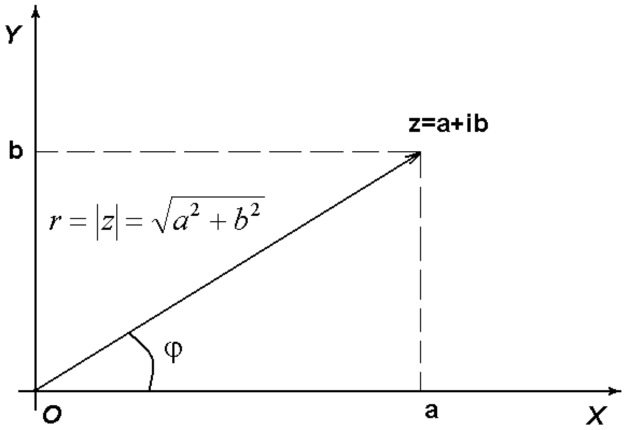

Рис. 5

Из определения модуля и аргумента комплексного числа z следует, что если $z = a + ib$, то

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0, \qquad tg\,\varphi = \frac{b}{a}.$$

Между тем, аргумент комплексного числа $z \neq 0$ определен лишь с точностью до любого слагаемого кратного 2π:

$$\varphi = Arg\ z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{b}{a} + 2k\pi & (I\ и\ IV\ квадранты), \\ arctg\,\dfrac{b}{a} + (2k+1)\pi & (II\ и\ III\ квадранты); \end{cases}$$

здесь $arctg$ означает главное значение $Arctg$, т.е. значение на промежутке $(-\pi/2; \pi/2)$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Обозначим это главное значение $Arctg$ за φ_0. При $a = 0, \quad b > 0$ имеем $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$; при $a = 0, \quad b < 0$ — $\varphi_0 = -\dfrac{\pi}{2}$.

Наряду с символом Arg, обозначающим всю совокупность значений аргумента, употребляют символ $\arg$, обозначающий одно какое-либо из значений Arg, в случае надобности специально уточняется, какое именно значение берется.

Отметим некоторые важные соотношения, которые непосредственно вытекают из геометрической интерпретации комплексного числа.

1) прямая $|z_1 + z_2|$ не может быть длиннее ломаной, состоящей из звеньев $|z_1|$ и $|z_2|$:
   $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$;
2) каждая из сторон треугольника всегда больше разности двух других сторон:
   $|z_1 + z_2| \ge |z_1| - |z_2|$;
3) поскольку разность комплексных чисел $z_1 - z_2$ можно истолковать как сумму z_1 и $(-z_2)$, то из п.1 и п.2 вытекают еще два неравенства:
   $|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

Из рисунка 5 нетрудно видеть, как действительная и мнимая части комплексного числа выражаются через модуль и аргумент

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi.$$

Таким образом, комплексное число $z = (a, b)$ можно представить в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такую запись комплексного числа называют <u>тригонометрической формой комплексного числа.</u>

Условие равенства двух комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ в тригонометрической форме примет вид

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2, \quad Arg\, z_1 = Arg\, z_2.$$

Здесь равенство аргументов подразумевает равенство множеств.

Операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня удобно проводить над комплексными числами в тригонометрической форме.

Пусть комплексные числа z_1 и z_2 даны в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

тогда для произведения комплексных чисел получим следующую формулу:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

т.е.

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad Arg\,(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi k.$$

Рассматривая $z_1 \cdot z_2$ как одно комплексное число легко распространить операцию умножения на случай любого числа сомножителей. При этом итоговая формула примет вид:

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n)\right].$$

Тригонометрическое представление позволяет дать простое геометрическое толкование операции умножения. При умножении комплексного числа z_1 на z_2 модуль $|z_1|$ растягивается в $|z_2|$ раз (если $|z_2| < 1$, то $|z_1|$ сжимается в $1 : |z_2|$ раза) и, кроме того, вектор z_1 поворачивается против часовой стрелки на угол φ_2.

Следует отметить, что введенное умножение не является умножением векторов, изображающих комплексные числа, ни в скалярном, ни в векторном смысле. В результате умножения комплексных чисел вновь получается комплексное число. Геометрически умножение двух комплексных чисел интерпретируется как построение треугольника, подобного данному с заданным коэффициентом подобия. На рисунке 6 представлено умножение двух комплексных чисел:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2).$$

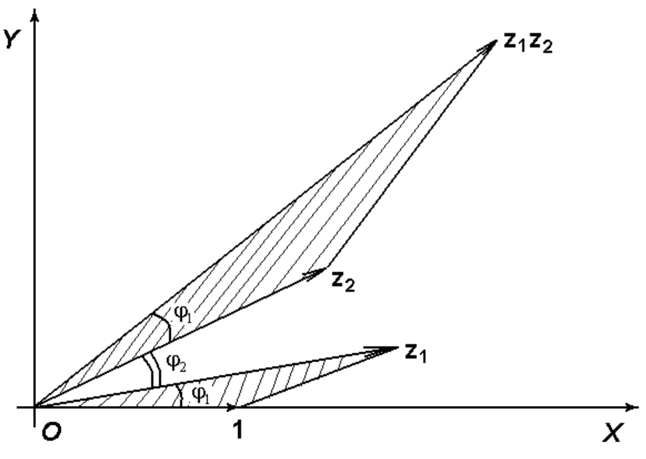

Рис. 6

Видно, что заштрихованные треугольники на рисунке 6 подобны между собой. В заключение отметим, что правило знаков при умножении действительных чисел, которое в арифметике носит условный характер, в области комплексных чисел приобретает наглядность. В самом деле, аргумент действительного положительного числа есть нуль, аргумент действительного отрицательного числа есть π; поэтому при умножении положительного числа на отрицательное аргумент произведения будет $0+\pi=\pi$, т.е. в результате получаем число отрицательное. При умножении отрицательного числа на отрицательное аргумент будет $\pi+\pi=2\pi$. Комплексное же число с аргументом 2π совпадает по направлению с положительным направлением действительной оси, следовательно, есть действительное положительное число.

Частное двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ находится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right],$$

т.е.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad Arg\,\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2+2\pi k.$$

Возведение комплексного числа в n-ю степень (n — натуральное число) производится по формуле

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

т.е.

$$\left|z^n\right|=|z|^n, \quad Arg\,(z^n)=n\arg z+2\pi k,$$

последнее следует из формулы умножения n одинаковых комплексных чисел.

Извлечение корня степени n из комплексного числа z осуществляется по правилу

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi_0+2\pi k}{n}\right),$$

где φ_0 — главное значение аргумента числа z (рис. 7).

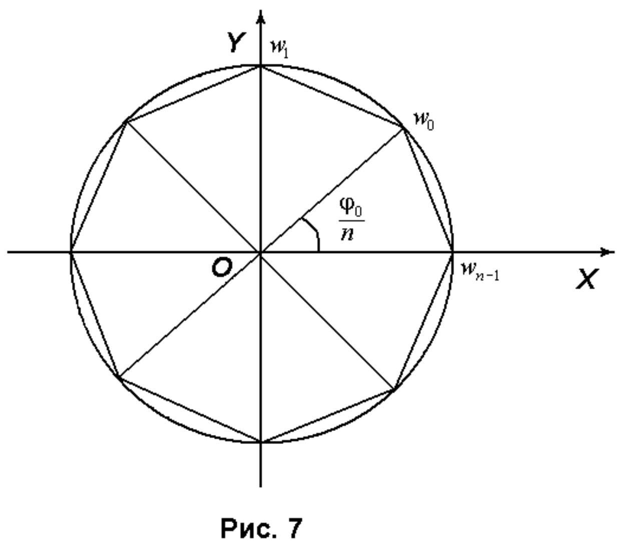

Рис. 7

Полагая $k = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ (n-1)$ получим n различных значений корня $w_0,\ w_1,\ \ldots,\ w_{n-1}$, которые на комплексной плоскости (w) изобразится точками, расположенными в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса, равного $\sqrt[n]{r}$, с центром в начале координат.

§4. Показательная форма

Используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

комплексное число z можно записать в виде

$$z = r\, e^{i\varphi}.$$

Такая запись комплексного числа называется <u>показательной формой</u> комплексного числа.

Условие равенства двух комплексных чисел z_1 и z_2 в показательной форме совпадает с тригонометрическим представлением.

Операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня над комплексными числами в показательной форме также не требуют существенных усилий.

Пусть комплексные числа z_1 и z_2 даны в показательной форме:

$$z_1 = r_1\, e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2\, e^{i\varphi_2},$$

тогда произведение комплексных чисел находится по формуле

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Для частного двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ справедливо следующее представление:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Возведение комплексного числа в n-ю степень (n — натуральное число) производится по формуле

$$z^n = r^n\, e^{in\varphi}.$$

Наконец, извлечение корня степени n из комплексного числа z осуществляем по правилу

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}},$$

где $\varphi_0 = \arg z$.

Как и прежде, полагая $k = 0,\ 1, 2, \ldots, (n-1)$ получим n различных значений корня $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$.