

Лекция №2. Бинарные отношения и соответствия

Раздел 2. Теория отношений

дисциплина «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»

Направление подготовки: 09.03.02 «Информационные системы и технологии»

1. Определение бинарного отношения и примеры

Бинарное отношение — это подмножество декартова произведения двух множеств. Пусть A и B — два множества. Бинарное отношение R между множествами A и B — это подмножество $A \times B$. Элементы A и B , которые связаны отношением R , записываются как $(a, b) \in R$ или aRb .

Примеры бинарных отношений:

1. **Отношение равенства** на множестве целых чисел: aRb если $a = b$. Это отношение является тривиальным примером, где каждое число равно самому себе.
2. **Отношение "меньше"** на множестве натуральных чисел: aRb если $a < b$. Это отношение используется для упорядочивания чисел по возрастанию.
3. **Отношение делимости** на множестве натуральных чисел: aRb если a делит b . Это отношение широко используется в теории чисел.
4. **Отношение "родитель"** в множестве людей: aRb если a является родителем b . Это пример отношения в контексте социальных связей.

2. Основные свойства бинарных отношений

Бинарные отношения могут обладать различными свойствами, которые определяют их характер и поведение. Рассмотрим основные свойства:

Рефлексивность

Отношение R на множестве A называется **рефлексивным**, если каждый элемент множества A связан с самим собой. Формально, отношение R рефлексивно, если:

$$\forall a \in A, (a, a) \in R.$$

Пример: Отношение равенства $=$ на любом множестве является рефлексивным, так как каждый элемент равен самому себе.

Симметричность

Отношение R на множестве A называется **симметричным**, если для любых элементов a и b , связанных отношением, справедливо и обратное отношение. Формально, отношение R симметрично, если:

$$\forall a, b \in A, (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R.$$

Пример: Отношение дружбы между людьми является симметричным, так как если человек a дружит с человеком b , то и человек b дружит с человеком a .

Транзитивность

Отношение R на множестве A называется **транзитивным**, если, если первый элемент связан со вторым, а второй — с третьим, то первый связан с третьим. Формально, отношение R транзитивно, если:

$$\forall a, b, c \in A, (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R.$$

Пример: Отношение "меньше или равно" на натуральных числах транзитивно, так как если $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$.

Антисимметричность

Отношение R на множестве A называется **антисимметричным**, если для любых двух элементов, связанных в обе стороны, эти элементы равны. Формально, отношение R антисимметрично, если:

$$\forall a, b \in A, (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b.$$

Пример: Отношение "меньше или равно" на натуральных числах антисимметрично, так как если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$.

Эти свойства позволяют классифицировать и анализировать отношения, а также понять их поведение в различных контекстах.

3. Отношение эквивалентности и разбиение множества

Отношение эквивалентности — это бинарное отношение, которое является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Если на множестве A определено отношение эквивалентности R , то оно делит множество A на классы эквивалентности.

Класс эквивалентности элемента a — это множество всех элементов, которые эквивалентны a , обозначается как $[a]$.

Связь с разбиением множества

Отношение эквивалентности на множестве разбивает его на непересекающиеся классы эквивалентности, которые вместе составляют всё множество. Это разбиение означает, что каждый элемент множества принадлежит ровно одному классу эквивалентности.

Пример: Рассмотрим множество целых чисел и отношение эквивалентности "равенство по остатку при делении на 3". Это отношение делит целые числа на три класса эквивалентности:

1. Числа, дающие остаток 0 при делении на 3: $\{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\}$.
2. Числа, дающие остаток 1 при делении на 3: $\{\dots, -2, 1, 4, 7, \dots\}$.
3. Числа, дающие остаток 2 при делении на 3: $\{\dots, -1, 2, 5, 8, \dots\}$.

Каждое целое число принадлежит ровно одному из этих классов, и все классы вместе составляют множество всех целых чисел.

4. Частичный порядок и примеры

Частичный порядок — это бинарное отношение, которое является рефлексивным, транзитивным и антисимметричным. Множество с частично упорядоченным отношением называется **частично упорядоченным множеством** или **посетом**.

Примеры частичного порядка:

1. **Отношение "меньше или равно"** на множестве натуральных чисел. Это классический пример частичного порядка, где каждый элемент может быть сравним с другим, но не обязательно равен.
2. **Отношение включения ($\subseteq$)** на множестве всех подмножеств заданного множества. Здесь одно подмножество может быть вложено в другое, что создает частичный порядок.
3. **Иерархия должностей** в организации. Например, если одна должность выше другой, то это задает частичный порядок, так как два сотрудника могут быть несравнимыми (находиться на одном уровне).
4. **Частичный порядок по делимости** на множестве натуральных чисел: aRb если a делит b . Это отношение рефлексивно (каждое число делит само себя), транзитивно (если a делит b , а b делит c , то a делит c) и антисимметрично (если a делит b и b делит a , то $a = b$).

Частичный порядок позволяет моделировать и анализировать структуры, где не все элементы сравнимы между собой, создавая более гибкую иерархию, чем линейный порядок.

5. Функция как частный случай бинарного отношения

Функция — это специфический тип бинарного отношения между двумя множествами. Формально, функция f из множества A в множество B (обозначается как $f: A \rightarrow B$) — это бинарное отношение, где каждому элементу $a \in A$ соответствует ровно один элемент $b \in B$. Это значит, что для функции f выполняются следующие условия:

1. **Определенность:** Для каждого $a \in A$ существует хотя бы одно $b \in B$, такое что $(a, b) \in f$.
2. **Единственность:** Для каждого $a \in A$ существует не более одного $b \in B$, такое что $(a, b) \in f$.

В контексте бинарных отношений функция является частным случаем, где отношение определяется на множестве A и подмножестве B таким образом, что каждому элементу a сопоставлен единственный элемент b .

Примеры:

- **Функция сложения:** Пусть A — множество всех пар натуральных чисел, а B — множество натуральных чисел. Отношение $R \subseteq A \times B$, где $(a, b, c) \in R$ тогда и только тогда, когда $a + b = c$, является функцией из A в B .
- **Функция идентичности:** Отношение I на множестве A , где $(a, a) \in I$ для всех $a \in A$, является функцией, так как каждому элементу соответствует сам он же.

Функции играют ключевую роль в математике и информатике, поскольку они позволяют описывать и моделировать процессы, где каждому входному значению сопоставляется точно одно выходное значение.

6. Инверсия и композиция отношений

Инверсия отношений

Инверсия бинарного отношения $R \subseteq A \times B$ — это отношение $R^{-1} \subseteq B \times A$, которое состоит из всех пар (b, a) , таких что $(a, b) \in R$. Инверсия меняет местами элементы каждой пары в отношении.

Пример: Если $R = \{(1,2), (3,4)\}$, то $R^{-1} = \{(2,1), (4,3)\}$.

Инверсия полезна в ситуациях, когда необходимо рассматривать обратное отношение между элементами, например, при изучении обратимых функций в алгебре.

Композиция отношений

Композиция двух отношений $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$, обозначаемая как $S \circ R$, — это отношение, состоящее из пар (a, c) , для которых существует $b \in B$ такой, что $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in S$.

Пример: Пусть $R = \{(1,2), (2,3)\}$ и $S = \{(2,4), (3,5)\}$. Тогда композиция $S \circ R = \{(1,4), (2,5)\}$.

Композиция отношений позволяет комбинировать различные бинарные отношения для получения новых, более сложных связей, что широко используется в математическом моделировании и компьютерных науках.

7. Различия между отношениями эквивалентности и частичного порядка

Отношения эквивалентности и частичного порядка являются двумя важными типами бинарных отношений, которые обладают особыми свойствами и применяются в различных контекстах.

Отношение эквивалентности

Отношение эквивалентности — это отношение, которое является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Оно делит множество на классы эквивалентности, в которых все элементы считаются равными по отношению друг к другу.

Пример: Отношение "равенство по остатку при делении на 3" на множестве целых чисел делит его на три класса: числа, дающие остаток 0, 1 и 2.

Частичный порядок

Частичный порядок — это отношение, которое является рефлексивным, транзитивным и антисимметричным. Множество с частично упорядоченным отношением называется частично упорядоченным множеством или посетом. Частичный порядок позволяет моделировать иерархические структуры, где некоторые элементы могут быть несравнимы друг с другом.

Пример: Отношение "меньше или равно" на множестве натуральных чисел является частичным порядком, так как оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Ключевые различия:

- **Симметричность:** Отношение эквивалентности симметрично, тогда как частичный порядок антисимметричен.
- **Структура:** Отношение эквивалентности создает разбиение множества на классы, тогда как частичный порядок создает иерархическую структуру.
- **Сравнимость:** В отношениях эквивалентности все элементы внутри класса равны, в то время как частичный порядок допускает несравнимость некоторых элементов.

8. Применение матриц и графов для представления бинарных отношений

Бинарные отношения можно эффективно представлять с помощью матриц и графов, что позволяет визуализировать и анализировать их структуру и свойства.

Матрицы

Бинарное отношение R на конечном множестве может быть представлено в виде матрицы смежности. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Матрица M размером $n \times n$ определяется следующим образом: элемент $m_{ij} = 1$, если $(a_i, a_j) \in R$, и $m_{ij} = 0$ в противном случае.

Пример: Рассмотрим множество $A = \{1, 2, 3\}$ и отношение $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$. Матрица смежности M будет:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицы позволяют легко выполнять операции над отношениями, такие как инверсия и композиция.

Графы

Бинарное отношение можно также представить в виде ориентированного графа, где вершины соответствуют элементам множества, а ориентированные ребра — парам в отношении.

Пример: Отношение "меньше" на множестве чисел $\{1, 2, 3\}$ можно представить графом с вершинами 1, 2 и 3, соединенными ребрами $1 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 3$.

Графы обеспечивают наглядное представление отношений и позволяют использовать алгоритмы теории графов для анализа и обработки данных.

1. Что такое бинарное отношение? Приведите примеры.

Бинарное отношение — это подмножество декартова произведения двух множеств. Если A и B — два множества, то бинарное отношение R между A и B — это множество пар (a, b) , где $a \in A$ и $b \in B$. Запись aRb означает, что a связано с b отношением R .

Примеры:

1. Отношение "равенства" на множестве натуральных чисел: aRb если $a = b$.
2. Отношение "меньше" на множестве целых чисел: aRb если $a < b$.
3. Отношение "делимости" на множестве натуральных чисел: aRb если a делит b .

2. Какие свойства могут характеризовать бинарные отношения?

Рефлексивность: Отношение R на множестве A называется рефлексивным, если каждый элемент связан с самим собой: $\forall a \in A, (a, a) \in R$.

Симметричность: Отношение R на множестве A называется симметричным, если для любых $a, b \in A$, если $(a, b) \in R$, то $(b, a) \in R$.

Транзитивность: Отношение R на множестве A называется транзитивным, если для любых $a, b, c \in A$, если $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in R$, то $(a, c) \in R$.

Антисимметричность: Отношение R на множестве A называется антисимметричным, если для любых $a, b \in A$, если $(a, b) \in R$ и $(b, a) \in R$, то $a = b$.

3. Что такое отношение эквивалентности?

Отношение эквивалентности — это бинарное отношение, которое является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Оно делит множество на классы эквивалентности, где все элементы внутри одного класса эквивалентны друг другу. Примером отношения эквивалентности является отношение "равенство по остатку при делении на n " на множестве целых чисел.

4. Объясните, что такое отношение порядка и его виды (частичный и линейный порядок).

Отношение порядка — это бинарное отношение, которое позволяет сравнивать элементы множества.

- **Частичный порядок:** Это отношение, которое является рефлексивным, транзитивным и антисимметричным. Не все элементы обязательно сравнимы. Пример: включение подмножеств.
- **Линейный порядок:** Это частичный порядок, в котором любые два элемента сравнимы. То есть, для любых a и b , либо $a \leq b$, либо $b \leq a$. Пример: стандартное отношение "меньше или равно" на числовой прямой.

5. Что такое функция и как она связана с бинарными отношениями?

Функция из множества A в множество B — это бинарное отношение, где каждому элементу из A соответствует ровно один элемент из B . Таким образом, функция является частным случаем бинарного отношения, где каждому входному значению ставится в соответствие точно одно выходное значение.

16. Определите инъекцию, сюръекцию и биекцию.

- **Инъекция (вложение):** Функция $f: A \rightarrow B$ называется инъективной, если для любых $a_1, a_2 \in A$, если $f(a_1) = f(a_2)$, то $a_1 = a_2$. То есть, разные элементы A отображаются в разные элементы B .
- **Сюръекция (отображение "на"):** Функция $f: A \rightarrow B$ называется сюръективной, если для каждого $b \in B$ существует хотя бы один $a \in A$, такой что $f(a) = b$. То есть, образ функции покрывает всё множество B .
- **Биекция:** Функция $f: A \rightarrow B$ называется биективной, если она одновременно инъективна и сюръективна. Это означает, что существует взаимно-однозначное соответствие между элементами A и B .

7. Объясните, что такое обратимое отношение.

Обратимое отношение — это отношение, для которого существует обратное отношение, восстанавливающее оригинальное соответствие. В контексте функций это означает, что если функция $f: A \rightarrow B$ является биекцией, то существует обратная функция $f^{-1}: B \rightarrow A$, такая что $f(f^{-1}(b)) = b$ и $f^{-1}(f(a)) = a$.

18. Какова роль матриц и графов в представлении бинарных отношений?

Матрицы и графы являются эффективными способами представления бинарных отношений:

- **Матрицы:** Бинарное отношение на конечном множестве можно представить в виде матрицы смежности, где строки и столбцы соответствуют элементам множества, а элемент матрицы равен 1, если соответствующая пара находится в отношении, и 0 в противном случае.

- **Графы:** Бинарное отношение можно представить в виде ориентированного графа, где вершины представляют элементы множества, а ориентированные ребра — пары, входящие в отношение.

Эти представления позволяют визуализировать и анализировать отношения, а также применять алгоритмы для их обработки.

19. Что такое композиция отношений?

Композиция отношений R и S на множествах A , B и C соответственно, обозначаемая как $S \circ R$, — это отношение, состоящее из пар (a, c) , для которых существует элемент $b \in B$ такой, что $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in S$. Композиция позволяет строить новые отношения из существующих и исследовать сложные зависимости между элементами множеств.

20. Объясните понятие транзитивного замыкания отношения.

Транзитивное замыкание бинарного отношения R на множестве A — это минимальное транзитивное отношение R^+ , которое содержит R . Оно добавляет к отношению R минимальное количество пар, необходимых для обеспечения транзитивности. Для любого элемента, если aRb и bRc , то должно быть aR^+c . Транзитивное замыкание часто используется для выявления всех возможных путей связи в графах и сетях.