

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

Е.В. Рунёв

**Методические указания
по выполнению практических заданий
по дисциплине
«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.24)**

для специальности
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации
«Информационная безопасность автоматизированных систем на
транспорте»

Форма обучения – очная

РАЗДЕЛ 2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Санкт-Петербург 2020

ТЕМА 1.

Множество комплексных чисел: определение,
алгебраическая форма записи комплексного числа.
Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

Модуль и аргумент комплексного числа.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Возведение в натуральную степень.

Извлечение корня из комплексного числа в тригонометрической форме.

Показательная форма записи комплексного числа.

Три формы записи комплексного числа

Пример. Установить геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} - 4 = 0$.

$$z = x + iy; \bar{z} = x - iy; \operatorname{Re} \bar{z} = x; \operatorname{Im} z = y; \frac{x}{y} - 4 = 0; y = \frac{x}{4}.$$

Пример. Найти вещественную часть числа z , если $|z| = 12$ и $\arg z = \arccos \frac{1}{6}$.

$$\varphi = \arg z = \arccos \frac{1}{6}; \cos \varphi = \frac{1}{6}; \operatorname{Re} z = |z| \cos \varphi = 2.$$

Пример. Найти модуль комплексного числа z , если $\operatorname{Im} z = 10$ и $\arg z = \arcsin \frac{5}{6}$.

$$\varphi = \arg z = \arcsin \frac{5}{6}; \sin \varphi = \frac{5}{6}; \operatorname{Im} z = |z| \sin \varphi; |z| = \frac{\operatorname{Im} z}{\sin \varphi} = 12.$$

Пример. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -3 + 3i$ (рис. 1.2), записать его тригонометрическую и показательную формы.

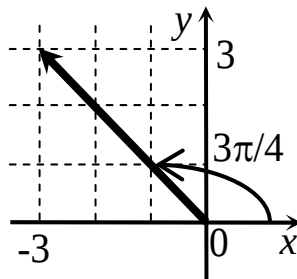


Рис. 1.2

$$r = |z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}, \quad \arg z = \arccos \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4}.$$

$$z = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) - \text{тригонометрическая форма.}$$

$$z = 3\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} - \text{показательная форма.}$$

Пример. Вычислить $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$, $z \cdot \bar{z}$, $\bar{z} / |z|$, если $z = 2 + \sqrt{5}i$.

Для $z = 2 + \sqrt{5}i$ сопряженное комплексное число $\bar{z} = 2 - \sqrt{5}i$.

$$z + \bar{z} = 2 + \sqrt{5}i + 2 - \sqrt{5}i = 4;$$

$$z - \bar{z} = 2 + \sqrt{5}i - 2 + \sqrt{5}i = 2\sqrt{5}i;$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2 = 9, \quad |z| = \sqrt{9} = 3;$$

$$\frac{\bar{z}}{|z|} = \frac{2 - \sqrt{5}i}{3} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}i.$$

Пример. Найти $z_1 \cdot z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 + i$.

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(2 + i) = 2 - 2i + i - i^2 = 2 - 2i + i + 1 = 3 - i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(1 - i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2 - i - 2i + i^2}{4 - i^2} = \frac{1 - 3i}{4 + 1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i.$$

Пример. Найти вещественную и мнимую части комплексного числа $z = (1 + i)^2$.

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i.$$

Вещественную часть комплексного числа $z = (1 + i)^2$: $\operatorname{Re} z = 0$;

Мнимая часть комплексного числа $z = (1 + i)^2$: $\operatorname{Im} z = 2$.

Пример. Вычислить $2z - z^2$ при $z = -1 + 2i$.

$$2z - z^2 = 2(-1 + 2i) - (-1 + 2i)^2 = -2 + 4i - 1 + 4i + 4 = 1 + 8i.$$

Пример. Найти z^2 и $\sqrt[3]{z}$, если $z = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ (рис. 1.2).

$$z^2 = \left(3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \right)^2 = (3\sqrt{2})^2 e^{i\frac{3\pi}{4} \cdot 2} = 18e^{i\frac{3\pi}{2}} = 18 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) =$$

$$= 18(0 + i(-1)) = -18i;$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \left(3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{18}e^{i\frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3}}, \quad (k = 0; 1; 2);$$

при $k = 0$: $z_1 = \sqrt[6]{18} e^{i \frac{3\pi/4}{3}} = \sqrt[6]{18} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \approx 1,145 + i \cdot 1,145$;

при $k = 1$:

$$z_2 = \sqrt[6]{18} e^{i \frac{3\pi/4 + 2\pi}{3}} = \sqrt[6]{18} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) \approx -1,564 + i \cdot 0,419$$
;

при $k = 2$:

$$z_3 = \sqrt[6]{18} e^{i \frac{3\pi/4 + 4\pi}{3}} = \sqrt[6]{18} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) \approx 0,419 - i \cdot 1,564.$$

Пример. Доказать, что $\sqrt{-1} = \pm i$.

Комплексное число -1 имеет вид $z = -1 + 0i$.

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \varphi = \arg z = \arccos \frac{-1}{1} = \pi.$$

Формула $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right)$ при $n = 2$:

$$\sqrt{-1} = \sqrt{1} \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi + 2\pi k}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2\pi k}{2} \right) \right).$$

При $k = 0$: $\sqrt{-1} = \sqrt{1} \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) = \sqrt{1} \cdot (0 + i \cdot 1) = i$;

при $k = 1$: $\sqrt{-1} = \sqrt{1} \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi + 2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2\pi}{2} \right) \right) = \sqrt{1} \cdot (0 - i \cdot 1) = -i$.

Пример. Решить уравнение $z^2 - 4z + 13 = 0$.

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36} \cdot i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Уравнение имеет комплексные корни $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 - 3i$.

Пример. Решить биквадратное уравнение $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$.

Обозначим $t = z^2$. Тогда $z^4 = t^2$.

Уравнение $t^2 - 3t - 4 = 0$ имеет корни $t = 4$ и $t = -1$.

После решения уравнений $z^2 = 4$ и $z^2 = -1$ получаем четыре корня биквадратного уравнения $z_1 = 2$, $z_2 = -2$, $z_3 = i$, $z_4 = -i$.

Пример. Доказать, что комплексные числа $a + bi$ и $a - bi$ являются корнями уравнения $z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0$.

Подстановка $z = a + bi$ в уравнение:

$$z^2 - 2az + a^2 + b^2 = (z - a)^2 + b^2 = (a + bi - a)^2 + b^2 = (bi)^2 + b^2 = 0.$$

Подстановка $z = a - bi$ в уравнение:

$$z^2 - 2az + a^2 + b^2 = (z - a)^2 + b^2 = (a - bi - a)^2 + b^2 = (-bi)^2 + b^2 = 0.$$

Пример. Доказать равенство $\cos^3 \varphi = \frac{1}{4} \cos 3\varphi + \frac{3}{4} \cos \varphi$.

По формуле Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$; $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \cdot \sin \varphi$.

$$\cos \varphi = \frac{\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi + \cos \varphi - i \cdot \sin \varphi}{2} = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}.$$

$$\cos^3 \varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3i\varphi} + 3e^{i\varphi} + 3e^{-i\varphi} + e^{-3i\varphi}) =$$

$$= \frac{1}{8} (\cos 3\varphi + i \cdot \sin 3\varphi + 3(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) +$$

$$+ 3(\cos \varphi - i \cdot \sin \varphi) + \cos 3\varphi - i \cdot \sin 3\varphi) = \frac{1}{4} \cos 3\varphi + \frac{3}{4} \cos \varphi.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вычислите $(2 + 3i) + (-3 + 4i) - (3 - 2i)$.

Ответ: $-4 + 9i$.

2. Вычислите $2z_1 - 3z_2$, если $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 + 3i$.

Ответ: $-4 - 11i$.

3. Вычислите $(2+3i) \cdot (3+4i)$.

Ответ: $-6 + 17i$.

4. Вычислите $(3 - 2i) \cdot (5 + 4i) - 7i + 1$.

Ответ: $24 - 5i$.

5. Вычислите $(4 - 3i) \cdot (2 + 5i) \cdot (7i + 1)$.

Ответ: $-75 + 175i$.

6. Вычислите $\frac{2 + 3i}{5 + 4i}$.

Ответ: $\frac{22}{41} + \frac{7}{41}i$.

7. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = \frac{2}{1-i\sqrt{3}} - 1$.

Ответ: 1; $2\pi/3$.

8. Вычислите $2e^{iz}$ в точке $z = \pi - 2i$.

Ответ: $-2e^2$.

9. Запишите комплексное число $z = 1 + \frac{i}{1-i}$ в показательной форме.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

10. Запишите алгебраическую форму произведения $z_1 \cdot z_2$, где $z_1 = 2 \cdot e^{i\pi/4}$, $z_2 = 3 \cdot e^{i\pi/12}$.

Ответ: $6+6i$.

11. Вычислите $\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^6$.

Ответ: -1 .

12. Вычислите i^{10} .

Ответ: 1.

13. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $(1+i)^5$.

Ответ: $4\sqrt{2}; -\frac{3\pi}{4}$.

14. Вычислите $\sqrt[3]{8i}$, сделайте проверку.

Ответ: $\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} + i; -2i$.

15. Установите геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $z \cdot \bar{z} - 2 \cdot \operatorname{Im} z + \operatorname{Re}(z^2) - 1 = 0$

Ответ: $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$.

16. Докажите формулу $\sin^3 \varphi = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi$, применив формулу Эйлера.

17. Докажите формулу $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$, применив формулу Эйлера.

18. Решите уравнение $z^2 + 4z + 13 = 0$.

Ответ: $-2 + 3i$; $-2 - 3i$.

19. Решите уравнение $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$.

Ответ: 1 ; -1 ; $2i$; $-2i$.

20. Решите уравнение $(z^2 + 2z)^2 + 7(z^2 + 2z) + 10 = 0$.

Ответ: $-1 + i$; $-1 - i$; $-1 + 2i$; $-1 - 2i$.

21. Составьте квадратное уравнение с вещественными коэффициентами, корнем которого является комплексное число $3 + 4i$.

Ответ: $z^2 - 6z + 25 = 0$.