ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

Е.А. Благовещенская

Конспект лекций

по дисциплине

«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.13)

для специальности
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации
«*Безопасность автоматизированных систем на железнодорожном транспорте*»

Форма обучения – очная

РАЗДЕЛ 1. ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Санкт-Петербург 2024

Лекция 1.
Множества, подмножества. Операции над множествами. Определение полугруппы, группы, кольца и поля. Основные примеры групп и колец.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ.

Определение 1. *Операцией* на множестве X называется функция $f: X \times X \to X$, которая сопоставляет паре элементов (x_1, x_2) множества X элемент того же множества, т.е. $f(x_1, x_2) \in X$.

Обозначение для произвольной операции: $f(x_1, x_2) = x_1 * x_2$.

Таким образом, сложение (+) и умножение ($\cdot$) являются операциями.

Определение 2. Множество G называется *группой,* если на нем задана операция $*$ со следующими свойствами:

1. $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$ – ассоциативность;
2. $\exists e \in G: \quad \forall g \in G \quad e * g = g * e = g$ – наличие единичного элемента;
3. $\forall g \in G \quad \exists g^{-1} \in G: \quad g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$ – наличие обратного элемента.

Определение 3. Группа G называется *коммутативной* или *абелевой*, если операция $*$ в ней коммутативна, т.е. $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$.

В качестве примера можно рассмотреть множество целых чисел $\mathbb{Z}$. Относительно операции сложения множество $\mathbb{Z}$ будет являться группой (единичным элементом будет 0, а обратным – элемент с обратным знаком), кроме того, эта группа будет абелевой. С другой стороны, множество $\mathbb{Z}$ относительно операции умножения не будет группой (не все элементы имеют обратный).

Определение 4. Множество K называется *кольцом,* если в нем определены две операции: сложения и умножения. Относительно операции сложения множество K является абелевой группой, а относительно умножения множество $K \setminus \{0\}$ является полугруппой. Умножение и сложение связаны между собой законом дистрибутивности:

1. $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
2. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Определение 5. Кольцо K называется *коммутативным*, если операция умножения коммутативна. Если полугруппа $K \setminus \{0\}$ относительно умножения имеет единицу, то кольцо называется *кольцом с единицей*.

Примерами колец могут служить множества рациональных $\mathbf{Q}$ и комплексных чисел $\mathbf{C}$. Причем оба эти кольца будут коммутативными и иметь единицу (т.к. операция умножения коммутативна, а единицей будет служить 1).

Под алгебраической структурой (иногда говорят об универсальных алгебрах) понимается множество A, на котором определена некоторая система внутренних операций и отношений, подчиняющихся тем или иным законам – аксиомам

соответствующих структур. Само множество A называется *носителем алгебраической структуры*.

Принято как саму структуру, так и ее носитель обозначать одной и той же буквой.

Под внутренней операцией понимается при этом, по существу, функция (не обязательно всюду определенная) нескольких аргументов из A со значениями в A, то есть

$$f : A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ раз}} \to A.$$

Число n называется *арностью операции*. При $n = 1$ говорят об *унарной*; при $n = 2$ – *бинарной*, при $n = 3$ – *тернарной* операциями и так далее.

В важнейших классических алгебраических структурах, изучаемых в стандартных программах курса алгебры, рассматриваются почти всегда бинарные операции.

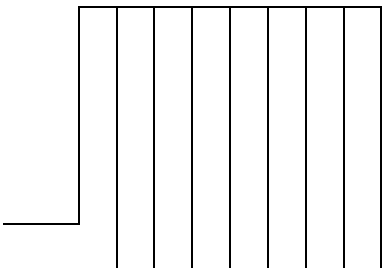
К алгебраическим структурам с одной внутренней бинарной операцией относятся группоиды, полугруппы и группы, квазигруппы.

Важнейшими алгебраическими структурами с двумя внутренними бинарными операциями являются кольца (коммутативные и некоммутативные), поля, тела. Другой тип алгебраических структур с двумя бинарными операциями образуют так называемые решетки.

При изучении алгебры студент обязан научиться различать основные алгебраические структуры (группа, кольцо, поле), их виды, знать основные стандартные примеры этих структур. При этом удобно пользоваться специальной таблицей аксиом:

1. На $\mathbb{A}$ определено «сложение» $+ : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ (алгебраичность сложения):
$a + b = c$

◄ГРУППОИД◄



2. Ассоциативность сложения:
$(a+b)+c=a+(b+c)$

◄*ПОЛУГРУППА*◄

3. Существует «нуль» - нейтральный элемент по сложению:
$\exists\, 0 : a+0=0+a=a$

◄МОНОИД◄

4. Для $\forall\, a$ существует противоположный элемент $-a$ – симметричный a по сложению:
$\forall\, a \;\; \exists -a : a+(-a)=0$

◄*ГРУППА*◄

5. Коммутативность сложения:
$a+b=b+a$

◄*АБЕЛЕВА ГРУППА*◄

6. На $\mathbb{R}$ определено «умножение» $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (алгебраичность умножения):
$a \cdot b = p$

7. Ассоциативность умножения:
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

8. Правая дистрибутивность умножения:
$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

9. Левая дистрибутивность умножения:
$c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b$

◄*КОЛЬЦО*◄

10. Существует «единица» - нейтральный элемент по умножению:
$\exists 1 : 1 \cdot a = a$

◄*КОЛЬЦО С 1*◄

11. Для $\forall\, a \neq 0$ существует обратный к a элемент a^{-1} – симметричный a по умножению:
$\forall\, a \neq 0 \;\; \exists a^{-1} \;:\; a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

◄**ТЕЛО, если $1 \neq 0$**◄

12. Коммутативность умножения:
$a \cdot b = b \cdot a$

◄*ПОЛЕ*◄