Нахождение наибольшего общего делителя многочленов

***Определение.*** Если каждый из двух многочленов делится без остатка на третий, то он называется общим делителем первых двух.

***Наибольшим общим делителем (НОД)*** двух многочленов называется их общий делитель наивысшей степени.

НОД можно находить с помощью разложения на неприводимые множители или с помощью алгоритма Евклида.

**Пример** Найти НОД многочленов  и .

*Решение.* Разложим оба многочлена на множители:


Из разложения видно, что искомым НОДом будет многочлен (*х* – 1).

**Пример** Найти НОД многочленов  и .

*Решение.* Разложим оба многочлена на множители.

Для многочлена  возможными рациональными корнями будут числа ±1, ±2, ±3 и ±6. С помощью подстановки убеждаемся, что *х* = 1 является корнем. Разделим многочлен на (*х* – 1) по схеме Горнера.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | –6 | 11 | –6 |
| 1 | 1 | 1 – 6 = –5 | –5 + 11 = 6 | 6 – 6 = 0 |

Следовательно, , где разложение квадратного трехчлена  было произведено по теореме Виета.

Для многочлена  возможными рациональными корнями будут числа ±1, ±2, ±3 и ±6. С помощью подстановки убеждаемся, что *х* = 1 является корнем. Разделим многочлен на (*х* – 1) по схеме Горнера.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 0 | –7 | 6 |
| 1 | 1 | 1 – 0 = 1 | 1 – 7 = –6 | –6 + 6 = 0 |

Следовательно, , где разложение квадратного трехчлена  было произведено по теореме Виета.

Сравнив разложение многочленов на множители, находим, что искомым НОДом будет многочлен (*х* – 1)(*х* – 2).

Аналогично можно находить и НОД для нескольких многочленов.

Тем не менее, метод нахождения НОДа путем разложения на множители доступен не всегда. Способ, позволяющий находить НОД для всех случаев, называется алгоритмом Евклида.

Схема алгоритма Евклида такова. Один из двух многочленов делят на другой, степень которого не выше степени первого. Далее, за делимое всякий раз берут тот многочлен, который служил в предшествующей операции делителем, а за делитель берут остаток, полученный при той же операции. Этот процесс прекращается, как только остаток окажется равным нулю. Покажем этот алгоритм на примерах.

Рассмотрим многочлены, использовавшиеся в двух предыдущих примерах.

**Пример** Найти НОД многочленов  и .

*Решение.* Разделим  на  «уголком»:

 

 *x*

 

Теперь разделим делитель  на остаток *х* – 1:

 

 *x* + 1

 

 

 0

Так как последнее деление произошло без остатка, то НОДом будет *х* – 1, т. е. многочлен, использовавшийся в качестве делителя при этом делении.

**Пример** Найти НОД многочленов  и .

*Решение*. Для нахождения НОД воспользуемся алгоритмом Евклида. Разделим  на  «уголком»:

 

 1

 

Произведем второе деление. Для этого пришлось бы разделить предыдущий делитель  на остаток , но так как =, для удобства будем делить многочлен  не на , а на . От такой замены решение задачи не изменится, так как НОД пары многочленов определяется с точностью до постоянного множителя. Имеем:

 

 

 

 

 0

Остаток оказался равным нулю, значит, последний делитель, т. е. многочлен

 и будет искомым НОДом.