**Матрицы и Определители**

# Задача 1

## Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера, выполнить проверку.



Решение. Составим из коэффициентов при неизвестных главный определитель системы

****

Вычислим его одним из способов (метод треугольников или метод дополнений).



Главный определитель системы отличен от нуля, значит система совместна.

Вычислим вспомогательные определители, которые получаются из главного заменой соответствующих столбцов на столбец свободных членов.







Решение системы находится по формулам Крамера:







Проверка:

Подставим найденное решение в систему уравнений:







# Задача 2

Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных Гаусса. Найти общее, частное, базисное решения системы:

****

Решение. Выписываем расширенную матрицу



За базисную переменную рекомендуется выбирать ту неизвестную, коэффициент при которой равен единице (во избежание дробных коэффициентов). Оставим без изменения третье уравнение (строку), а за базисную переменную примем . Воспользуемся элементарными преобразованиями, а именно: умножим третью строку на (-1) и сложим со второй, затем умножим третью же строку на (-3) и сложим с первой. Тогда  останется только в третьем уравнении (строке):



Оставим без изменения первую строку, переменную  примем за базисную и исключим ее из третьей строки (во вторую строку  не входит).



Во второй строке переменную  принимает за базисную и исключаем из остальных строк

.

В результате получаем систему с базисными переменными , , :

****

Выражая базисные переменные через остальные (их называют свободными переменными), получим общее решение системы:

****

Давая свободным переменным произвольные значения, получаем множество частных решений, например,





Частное решение, в котором все свободные переменные равны нулю, называют базисным решением:



# Задача 3

Выполнить действия с матрицами:



Решение. Устанавливаем возможность выполнения указанных действий. Первая матрица имеет порядок , вторая . Умножение возможно, поскольку число столбцов первой матрицы равно числу строк второй; в результате умножения получается матрица порядка .

У второго произведения первая матрица имеет порядок , вторая , умножение возможно, итоговая матрица будет иметь порядок .

Сложение первого произведения со вторым также возможно, ибо оба произведения есть матрица .

Следовательно,

1) 



;

2) ;

3) .

# Задача 4

Найти ранг матрицы 

Решение.



Число линейно независимых строк матрицы равно четырем, следовательно, .

# Задача 5

Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы. Вычисление обратной матрицы выполнить двумя способами: с помощью алгебраических дополнений и путем элементарных преобразований.



Решение. В матричной форме систему линейных уравнений можно записать так: **, где  – матрица коэффициентов системы;  – матрица-столбец неизвестных;  – матрица-столбец свободных членов. Умножив слева обе части равенства ** на  (существует, если ), получим

,

здесь  – единичная матрица.

Следовательно, чтобы найти решение системы  линейных уравнений с  неизвестными при помощи обратной матрицы, нужно матрицу, обратную матрице из коэффициентов системы, умножить на матрицу-столбец свободных членов. В результате получаем матрицу-столбец, которая и будет решением данной системы.

Найдем определитель матрицы 

.

, следовательно, матрица  обратима.

**Первый способ** вытекает из формулы, выражающей обратную матрицу

 ,

где  – алгебраические дополнения элементов  данной матрицы.

Найдем алгебраические дополнения для элементов данной матрицы:

;

;

;

;

;

;

;

;

.

Обратная матрица имеет вид

.

Необходимо сделать проверку: .





Найдем решение системы .

,



**Второй способ** основан на элементарных преобразованиях вспомогательной матрицы, которая получается путем приписывания к данной матрице единичной матрицы того же порядка. Схематически это процесс записывается так:



Решение.





