ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

**Е.В. Рунёв**

# Методические указания
# по выполнению практических заданий

*по дисциплине*

«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.24)

для специальности
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации
«Информационная безопасность автоматизированных систем на транспорте»

Форма обучения – очная

## РАЗДЕЛ 8. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Санкт-Петербург 2020

# ТЕМА 1.

Примеры линейных пространств.
Линейная зависимость (ЛЗ) и линейная независимость (ЛНЗ) векторов.
Базис и размерность линейного пространства.

Задача 4.

В пространстве $\mathbf{R}^4$ даны столбцы $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \overline{m}_3, \overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_3$.

1. Найти базис и размерность подпространства $M = < \overline{m}_1, \overline{m}_2, \overline{m}_3 >$. Все векторы системы образующих подпространства $M$, не являющиеся базисными, разложить по найденному базису.
2. Найти базис и размерность подпространства $N = < \overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_3 >$. Все векторы системы образующих подпространства $N$, не являющиеся базисными, разложить по найденному базису.
3. Найти базис и размерность подпространства $M + N$. Все векторы системы $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \overline{m}_3, \overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_3$, не являющиеся базисными, разложить по найденному базису.
4. Найти размерность подпространства $M \cap N$ и базис этого подпространства Доказать, что указанная совокупность векторов, действительно, является базисом подпространства $M \cap N$.
6. Написать систему линейных однородных алгебраических уравнений, задающих подпространство $M$.
7. Написать систему линейных однородных алгебраических уравнений, задающих подпространство $N$.
8. Написать систему линейных алгебраических уравнений, задающих подпространство $M \cap N$. Воспользовавшись этой системой, найти базис подпространства $M \cap N$.
9. Написать систему линейных алгебраических уравнений, задающих подпространство $M + N$.

Задача 6.

Пусть $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4$--базис пространства $X$ .

1.Исходя из определения докажите, что совокупность векторов $f = (\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3, \overline{f}_4)$ является базисом пространства $X$. В результате получите критерий базиса (т.е. необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять система из n векторов n-мерного пространства (в терминах определителя), чтобы она была базисом).

2. Пользуясь критерием, полученным в п.1, докажите, что совокупность векторов $g = (\overline{g}_1, \overline{g}_2, \overline{g}_3, \overline{g}_4)$ является базисом пространства $X$ .

3. Найдите матрицу перехода от базиса $f$ к базису $g$. Сделайте проверку в векторной форме, т.е. выразите элементы базиса $g$ через элементы базиса $e$, используя соответствующие элементы найденной матрицы.

4. Найдите матрицу перехода от базиса $g$ к базису $f$. Сделайте проверку в векторной форме, т.е. выразите элементы базиса $f$ через элементы базиса $e$, используя соответствующие элементы найденной матрицы.

5. Пусть $[\bar{x}]_f = (y_1\ y_2\ y_3\ y_4)^T$ --столбец координат вектора $\bar{x}$ в базисе $f$; $[\bar{x}]_g = (z_1\ z_2\ z_3\ z_4)^T$ --столбец координат вектора $\bar{x}$ в базисе $g$. В матричном и в развёрнутом виде напишите формулы, выражающие столбец $[\bar{x}]_f$ через столбец $[\bar{x}]_g$.

6.В матричном и в развёрнутом виде напишите формулы, выражающие столбец $[\bar{x}]_g$ через столбец $[\bar{x}]_f$.

**Пример 1.** Пусть $\mathcal{X} = \boldsymbol{R}_n$, $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$, где $\vec{e}_i = (0\ldots0\,1\,0\ldots0)$ - строка, у которой на $i$-ом месте
стоит единица, $\vec{x} = (1\,2\ldots n)$ . Очевидно, справедливо равенство:

$$\vec{x} = (1\,2\ldots n) = 1\cdot\vec{e}_1 + 2\cdot\vec{e}_2 + \ldots + n\cdot\vec{e}_n.$$ Следовательно, $[\vec{x}]_e = (1\,2\ldots n)^T$.

**Пример 2.** Пусть $\mathcal{X}$ =$\mathbf{R}_2[t]$- пространство многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше второй. Любой многочлен этого пространства имеет вид: $f(t) = a\cdot t^2 + b\cdot t + c\cdot 1$, где $a,b,c \in$ **R.**

Следовательно, совокупность $1, t, t^2$ - порождающая для пространства $\mathcal{X}$ , т.е. $\mathcal{X}$ $=<1,t,t^2>$.

Из равенства $a\cdot t^2 + b\cdot t + c\cdot 1 = 0$ и определения равенства многочленов следует, что $a = b = c = 0$. Следовательно, совокупность $e = (1, t, t^2)$ является линейно независимой, т.е. базисом пространства $\mathcal{X}$ и
$\dim\mathcal{X} = 3$. Покажем, что совокупность $e' = (1, t+1, (t+1)^2)$ также является базисом пространства $\mathcal{X}$ .

Из формулы Тейлора для многочленов степени не более второй следует, что любой такой многочлен можно записать следующим образом:

$f(t) = f(-1)\cdot 1 + \dfrac{f'(-1)}{1!}(t+1) + \dfrac{f''(-1)}{2!}(t+1)^2$. Таким образом, совокупность $e' = (1, t+1, (t+1)^2)$ - порождающая для пространства $\mathcal{X}$ , причём $\dim\mathcal{X} = 3$.

Следовательно, по следствию к теореме 2 совокупность $e'$ является базисом пространства $\mathcal{X}$ . Подсчитаем матрицы перехода $C_{e\to e'}$ и $C_{e'\to e}$.

Очевидно, справедливы равенства:

$$\begin{cases} 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2 \\ t+1 = 1\cdot 1 + 1\cdot t + 0\cdot t^2 \\ (t+1)^2 = 1\cdot 1 + 2\cdot t + 1\cdot t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_1' = 1\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = 1\cdot\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3' = 1\cdot\vec{e}_1 + 2\cdot\vec{e}_2 + 1\cdot\vec{e}_3 \end{cases} \Leftrightarrow C_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Пример 3**. Покажем, что пространство $\mathcal{X} = M_2(\mathbf{C})$ квадратных комплексных матриц порядка 2 является конечномерным комплексным пространством. Любая квадратная комплексная матрица $A$ порядка 2 имеет вид: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, где $a_{ij} \in$ **C,** $i, j = 1, 2$**.** Следовательно, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, и совокупность матриц $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ является

порождающей для пространства $\mathcal{X} = M_2(\mathbf{C})$. Следовательно, $\mathcal{X} = M_2(\mathbf{C})$ - конечномерное комплексное пространство.

**Пример 4.** Множество $\mathcal{X}_1 = \mathbf{C}_2$ комплексных строк длины 2 является комплексным линейным пространством, потому что такие строки можно складывать и умножать на комплексные числа, и при этом выполняются все 8 аксиом линейного пространства. Заметим, что пространство $\mathcal{X}$ из примера 4 и пространство $\mathcal{X}_1$ различные, несмотря на то, что как множества они равны.

Покажем, что совокупность строк $\vec{x}_1 = (2+i \quad 3-2i)$, $\vec{x}_2 = (-1+2i \quad 2+3i)$ этого пространства линейно зависимая. Действительно,
$i \cdot \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = (2i-1 \quad 3i+2) - (-1+2i \quad 2+3i) = (0 \quad 0) = \vec{0}$,
причём $i \neq 0, -1 \neq 0$.

## ТЕМА 2.

Подпространство линейного пространства.
Линейная оболочка множества в линейном пространстве.
Пересечение подпространств.
Объединение подпространств.
Линейная сумма подпространств.
Размерность линейной суммы (формула Грассмана).
Прямая сумма подпространств.
Разложение линейного пространства в прямую сумму подпространств.

**Задача 1.** Пусть $\mathcal{X} = M_n(\mathbf{K})$. Обозначим через $P$ и $Q$ множество всех симметричных и антисимметричных матриц пространства $\mathcal{X}$ соответственно, т.е. $P = \{A, A \in \mathcal{X} : A = A^T\}$; $Q = \{A, A \in \mathcal{X} : A = -A^T\}$.
Докажите, что $P$ и $Q$ - подпространства $\mathcal{X}$, $\mathcal{X} = P \oplus Q$. Для произвольной матрицы $A \in \mathcal{X}$ найдите
$pr_{P \square Q} A$.

**Задача 2.** Докажите, что для двух подпространств $P$ и $Q$ - конечномерного линейного пространства $\mathcal{X}$ одинаковой размерности существует общее прямое дополнение. Другими словами: если $\dim P = \dim Q$, то существует подпространство $L$ линейного пространства $\mathcal{X}$ такое, что справедливы равенства $\mathcal{X} = P \oplus L$ и $\mathcal{X} = Q \oplus L$.

**Задача 3.** Пусть $\mathcal{X}$ - пространство свободных векторов на плоскости, т.е. $\mathcal{X} = \mathcal{V}_2$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - два неколлинеарные вектора этого пространства. Тогда $(\vec{a}, \vec{b})$ - базис $\mathcal{X}$.
Пусть $P = <\vec{a}>, Q = <\vec{b}>$.
Любой вектор $\vec{z} \in \mathcal{V}_2$ может быть единственным образом разложен по этому базису: $\vec{z} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, где
$\lambda\vec{a} \in P, \mu\vec{b} \in Q$. Следовательно, $\mathcal{X} = P \oplus Q$, подпространство $Q$ является прямым дополнением подпространства $P$ до пространства $\mathcal{X}$, $\lambda\vec{a} = pr_{P \square Q}\vec{z}$.