ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

Е.А. Благовещенская

Методические указания по выполнению практических заданий

по дисциплине

«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.13)

для специальности
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации
«Информационная безопасность автоматизированных систем на транспорте»
Форма обучения – очная

РАЗДЕЛ 7. ТЕОРИЯ ГРУПП И КОЛЕЦ

Санкт-Петербург

Практическое занятие 15. Разложение абелевых групп.

Пример 1. Рассмотрим группу вычетов $A=\mathbb{Z}_{15}$. Тогда $n=15=3\cdot 5$, $A(3)=\{\bar{0},\bar{5},\overline{10}\}$, $A(5)=\{\bar{0},\bar{3},\bar{6},\bar{9},\overline{12}\}$. Изоморфизм $A(3)\oplus A(5)\to\mathbb{Z}_{15}$ можно задать следующим образом

$$(\bar{a},\bar{b})\to\overline{a+b}\,.$$

Если $n=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$, то группа вычетов по модулю n раскладывается в прямую сумму примарных p-компонент следующим образом

$$\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}\,.$$

Пример 2. Разложим группу вычетов $\mathbb{Z}_{360}$ в прямую сумму своих примарных компонент. Поскольку $360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$, то

$$\mathbb{Z}_{360}\cong\mathbb{Z}_8\oplus\mathbb{Z}_9\oplus\mathbb{Z}_5\,.$$

Для того, чтобы разложить абелеву группу

$$\mathbb{Z}_{n_1}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}_{n_m}$$

в прямую сумму примарных циклических групп, нужно разложить каждое слагаемое этой группы.

Пример 3. Разложим группу

$$\mathbb{Z}_{756}\oplus\mathbb{Z}_{2250}\oplus\mathbb{Z}_{105}$$

в прямую сумму примарных циклических групп. Поскольку $756=2^2\cdot 3^3\cdot 7$, $2250=2\cdot 3^2\cdot 5^3$, $105=3\cdot 5\cdot 7$, то

$$\mathbb{Z}_{756}\cong\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_{27}\oplus\mathbb{Z}_7\,,$$

$$\mathbb{Z}_{2250}\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_9\oplus\mathbb{Z}_{125}\,,$$

$$\mathbb{Z}_{105}\cong\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}_7\,.$$

Поэтому

$$\mathbb{Z}_{756}\oplus\mathbb{Z}_{2250}\oplus\mathbb{Z}_{105}\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}_7\oplus\mathbb{Z}_7\oplus\mathbb{Z}_9\oplus\mathbb{Z}_{27}\oplus\mathbb{Z}_{125}\,.$$

Пример 4. Определим, изоморфны ли группы $\mathbb{Z}_{15}\oplus\mathbb{Z}_{225}$ и $\mathbb{Z}_{75}\oplus\mathbb{Z}_{45}$.

Поскольку $15=3\cdot 5$, $225=9\cdot 25$, то

$$\mathbb{Z}_{15}\oplus\mathbb{Z}_{225}\cong\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}_9\oplus\mathbb{Z}_{25}\,.$$

Далее, $75=3\cdot 25$, $45=5\cdot 9$. Поэтому

$$\mathbb{Z}_{75} \oplus \mathbb{Z}_{45} \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_9 .$$

Поскольку разложения совпадают с точностью до перестановки слагаемых, группы изоморфны.

Пример 5. Определим, изоморфны ли группы $\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{225}$ и $\mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{135}$. Находим разложение каждой группы в прямую сумму примарных циклических групп.

$$\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{225} \cong \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{25},$$

$$\mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{135} \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{27} .$$

Примарные циклические группы не совпадают. группы не изоморфны.

Число неизоморфных абелевых групп порядка p^n равно числу $p(n)$ разбиений числа n в сумму нескольких (возможно, одного) натуральных чисел

$$n = n_1 + n_2 + ... + n_r \text{, где } 1 \le n_1 \le n_2 \le ... \le n_r ,\ 1 \le r \le n .$$

Например, существуют две неизоморфные абелевы группы порядка p^2: $\mathbb{Z}_{p^2}$ и $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.

$p(3) = 3$, т.к. $3 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1$.

$p(4) = 5$, т.к. $4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1$.

$p(5) = 7$, т.к. $5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 2 = \ = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Пример 6. Найдём число неизоморфных абелевых групп порядка 64. Поскольку $64 = 2^6$ и $6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 1 + 1 + 4 = 1 + 2 + 3 = = 2 + 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 3 = 1 + 1 + 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, то $p(6) = 11$. Поэтому существует 11 неизоморфных абелевых группы порядка 64.

Пример 7. Найдём число неизоморфных абелевых групп порядка 864. $864 = 3^3 \cdot 2^5$. Так как $p(3) = 3$, $p(5) = 7$, то абелевых групп порядка 864 существует $3 \cdot 7 = 21$.

Задачи.

Разложите в прямую сумму примарных циклических групп следующие группы

1. $\mathbb{Z}_6$.

2. $\mathbb{Z}_{12}$.

3. $\mathbb{Z}_{60}$.

4. Сколько существует неизоморфных абелевых групп порядка: а) 36; б) 100; в) 64?

Выясните, изоморфны ли следующие группы.

5. $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{18}$?

6. $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{24}$?

7. $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{10}$ и $\mathbb{Z}_{60} \oplus \mathbb{Z}_{10}$?

Практическое занятие 16. Кольцо многочленов над полем комплексных и вещественных чисел.

ПРИМЕРЫ:

1. Найти $f+g$, где $f = x^2 - 2x + 3$ $g = x^3 - 3x + 1$.

Решение: Согласно определению суммы многочленов получаем:

$$f + g = \left(x^2 - 2x + 3\right) + \left(x^3 - 3x + 1\right) = \left(0 \cdot x^3 + x^2 - 2x + 3\right) + \left(x^3 + 0 \cdot x^2 - 3x + 1\right) = x^3 + x^2 - 5x + 4.$$

2. Найти $f \cdot g$, где $f = x^2 + x - 1$ $g = x + 3$.

Решение: По определению произведения многочленов имеем:

$$f \cdot g = \left(x^2 + x - 1\right) \cdot (x + 3) = \left(x^2 + x - 1\right) \cdot \left(0 \cdot x^2 + x + 3\right) = x^3 + 4x^2 + 2x - 3.$$

ПРИМЕРЫ:

1. Разложить многочлен f по степеням $x - \alpha$, где $f = x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 6x - 10$, $\alpha = 2$.

Решение: Для решения задачи применим схему Горнера. Заметим, что если многочлен f разложен по степеням $x - \alpha$, т.е. $f = a_0 + a_1(x - \alpha) + a_2(x - \alpha)^2 + \cdots + a_n(x - \alpha)^n$, то a_0 – остаток при делении многочлена f на $x - \alpha$, a_1 – остаток при делении предыдущего частного на $x - \alpha$ и т.д.

	1	–3	5	–2	6	–10
2	1	–1	3	4	14	$\boxed{18}$
2	1	1	5	14	$\boxed{42}$	
2	1	3	11	$\boxed{36}$		
2	1	5	$\boxed{21}$			
2	1	$\boxed{7}$				
2	$\boxed{1}$					

Получили, что $a_0 = 18$, $a_1 = 42$, $a_2 = 36$, $a_3 = 21$, $a_4 = 7$, $a_5 = 1$, т.е. $f = (x-2)^5 + 7(x-2)^4 + 21(x-2)^3 + 36(x-2)^2 + 42(x-2) + 18.$

2. Разложить по степеням x многочлен $f(x-2)$, где $f = x^5 + x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 5$.

Решение: Для решения задачи можно в многочлене f заменить x на $x - 2$, но эта процедура будет очень громоздка. Поэтому здесь удобно применить схему Горнера. Разложим многочлен f по степеням $x + 2$.

	1	1	–2	4	–2	5
–2	1	–1	0	4	–10	$\boxed{25}$
–2	1	–3	6	–8	$\boxed{6}$	
–2	1	–5	16	$\boxed{-40}$		
–2	1	–7	$\boxed{30}$			
–2	1	$\boxed{-9}$				
–2	$\boxed{1}$					

$f=(x+2)^5-9(x+2)^4+30(x+2)^3-40(x+2)^2+6(x+2)+25.$ Если в полученном разложении заменить x на $x-2$, то получится искомое разложение $f(x-2)=x^5-9x^4+30x^3-40x^2+6x+25.$

ПРИМЕРЫ:

1. Найти НОД(f,g), где $f=x^2\left(x^3-8\right)$, $g=x^5(x-2)^3(x+5)^2$.

Решение: Многочлен g разложен на линейные множители. Осталось разложить многочлен f на вещественные неразложимые множители: $f=x^2\left(x^3-8\right)=x^2(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$. Выбирая множители, входящие в оба разложения, получаем: НОД$(f,g)=x^2(x-2)$.

2. Найти НОД(f,g), где $f=x^5-2x^4-38x^3+4x^2+109x+70$, $g=(x+1)^2\left(x^2-4\right)^3$.

Решение: Разложим многочлен g на линейные множители: $g=(x+1)^2\left(x^2-4\right)^3=(x+1)^2(x+2)^3(x-2)^3$. Проверим по схеме Горнера, какие из этих множителей и с каким показателем степени входят в многочлен f:

	1	–2	–38	4	109	70
–1	1	–3	–35	39	70	0
–1	1	–4	–31	70	0	
–2	1	–6	–19	108		
2	1	–2	–35	0		
2	1	0	–35			

Сначала проверяем двучлен $(x+1)$. Оказалось, что $f \vdots x+1$. Поскольку этот двучлен входит в многочлен g во второй степени, то надо проверить, делится ли многочлен f на $(x+1)^2$, т.е. делится ли $f_1=f/(x+1)$ на $(x+1)$. Коэффициенты частного уже есть, поэтому их можно взять в качестве нового заголовка схемы Горнера. В записи это отмечается проведенной под ними чертой. Видно, что и $f_1 \vdots x+1$. Дальнейшую делимость на $(x+1)$ проверять уже не надо, так как многочлен g не делится на $(x+1)^3$. Тогда проверяем следующий двучлен $(x+2)$. Проверку можно вести для частного $f_2=f/(x+1)^2=f_1/(x+1)$, коэффициенты которого уже получены. Видя, что $f_2(-2)\neq 0$, проверяем делимость на $(x-2)$ и получаем, что f_2 (а значит, и многочлен f) делится на $(x-2)$. Для проверки делимости на $(x-2)^2$ делим новое частное на $(x-2)$. В итоге получаем, что многочлен f дважды делится на $(x+1)$ и один раз на $(x-2)$, следовательно, НОД $(f,g)=(x+1)^2(x-2)$.

3. Найти НОД(f,g), где $f=x^5+2x^4-6x^3-20x^2-19x-6$, $g=x^4+4x^3+3x^2-4x-4$.

Решение: Поскольку не видно как разложить многочлены, то здесь удобно применить алгоритм Евклида. Делим с остатком многочлен f на многочлен g:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
-\;x^5 & +2x^4 & -6x^3 & -20x^2 & -19x & -6 & x^4+4x^3+3x^2-4x-4 \\ \cline{7-7}
x^5 & +4x^4 & +3x^3 & -4x^2 & -4x & & x-2 \\ \cline{1-5}
 & -\;-2x^4 & -9x^3 & -16x^2 & -15x & -6 & \\
 & -2x^4 & -8x^3 & -6x^2 & +8x & +8 & \\ \cline{2-6}
 & & -x^3 & -10x^2 & -23x & -14 &
\end{array}
$$

Теперь надо делить многочлен g на полученный остаток. Если умножить предварительно остаток на (-1) это не поменяет НОД, но упростит вычисления.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
-\;x^4 & +4x^3 & +6x^2 & -4x & -4 & x^3+10x^2+23x+14 \\ \cline{6-6}
x^4 & +10x^3 & +23x^2 & +14x & & x-6 \\ \cline{1-4}
 & -\;-6x^3 & -20x^2 & -18x & -4 & \\
 & -6x^3 & -60x^2 & -138x & -84 & \\ \cline{2-5}
 & & 40x^2 & +120x & +80 &
\end{array}
$$

Сокращаем полученный остаток на 40 и делим на него предыдущий делитель:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
-\;x^3 & +10x^2 & +23x & +14 & x^2+3x+2 \\ \cline{5-5}
x^3 & +3x^2 & +2x & & x+7 \\ \cline{1-3}
 & -\;7x^2 & +21x & +14 & \\
 & 7x^2 & +21x & +14 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Очередной остаток равен нулю, следовательно, последний делитель и есть НОД (f,g), значит, НОД$(f,g)=x^2+3x+2$.

4. Найти НОД(f,g), где $f=x^{40}+x^{35}+1$, $g=x^{35}+x^{34}+1$.

Решение: В этом случае вычисления по алгоритму Евклида будут очень громоздкими, поэтому здесь удобно воспользоваться следующим равенством:

$$d=\text{НОД}(f,g)=\text{НОД}(f-g,g),\quad f-g=x^{40}-x^{34}=x^{34}\left(x^6-1\right).$$

Поскольку x не входит множителем в многочлен f, то $d=\text{НОД}\left(x^6-1,g\right)$.

.Многочлен x^6-1 имеет следующее разложение:

$x^6-1=\prod\limits_{k=1}^{6}(x-\varepsilon_k)$, где ε_k – корни 6-й степени из 1. Осталось выяснить, которые из ε_k являются корнями многочлена g.

$g(\varepsilon_k)=\varepsilon_k^{35}+\varepsilon_k^{34}+1=\varepsilon_k^{36}\varepsilon_k^{-1}+\varepsilon_k^{36}\varepsilon_k^{-2}+1=\varepsilon_k^{-1}+\varepsilon_k^{-2}+1=0$, значит, $\varepsilon_k^2+\varepsilon_k+1=0$, т.е. ε_k – невещественный кубический корень из 1. Т.к. кубический корень из 1 является корнем 6-й степени из 1, то общими корнями многочлена x^6-1 и g будут ε и ε – два невещественных кубических корня из 1, а следовательно, НОД(f,g)= $(x-\varepsilon)(x-\varepsilon)=x^2+x+1$.

5. Найти вещественные корни многочлена
$x^5-(1-i)x^4+(5+i)x^3-(7-i)x^2-(8-13i)x+6+12i$.

Решение: Пусть α является вещественным корнем данного многочлена. Тогда $\alpha^5-(1-i)\alpha^4+(5+i)\alpha^3-(7-i)\alpha^2-(8-13i)\alpha+6+12i=0$, и в виду вещественности α
$\alpha^5-\alpha^4+5\alpha^3-7\alpha^2-8\alpha+6=0$, $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+13\alpha+12=0$, т.е. α есть общий корень многочленов $f=x^5-x^4+5x^3-7x^2-8x+6$ и $g=x^4+x^3+x^2+13x+12$, а значит, и корень НОД(f,g).

Найдем НОД(f,g) с помощью алгоритма Евклида:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & -x^4 & +5x^3 & -7x^2 & -8x & +6 & x^4+x^3+x^2+13x+12 \\
\cline{7-7}
x^5 & +x^4 & +x^3 & +13x^2 & +12x & & x-2 \\
\cline{1-5}
 & -2x^4 & +4x^3 & -20x^2 & -20x & +6 & \\
 & -2x^4 & -2x^3 & -2x^2 & -26x & -24 & \\
\cline{2-6}
 & & 6x^3 & -18x^2 & +6x & +30 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +x^3 & +x^2 & +13x & +12 & x^3-3x^2+x+5 \\
\cline{6-6}
x^4 & -3x^3 & +x^2 & +5x & & x+4 \\
\cline{1-4}
 & 4x^3 & +0x^2 & +8x & +12 & \\
 & 4x^3 & -12x^2 & +4x & +20 & \\
\cline{2-5}
 & & 12x^2 & +4x & -8 &
\end{array}
$$

Остаток легко раскладывается на множители: $12x^2+4x-8=12(x-2/3)(x+1)$. Проверим, не являются ли многочлены $(x-2/3)$ и $(x+1)$ множителями многочлена g, для чего применим схему Горнера:

	1	1	1	13	12
2/3	1	5/3	19/9	389/27	1750/81
−1	1	0	1	12	0

Итак, НОД$(f,g)=x+1$, следовательно, искомый корень многочлена один и равен 1.

6. Найти НОД(f,g) и его линейное представление, если $f=x^4+x^3-7x^2-x+6$, $g=x^3-4x$.

Решение: Найдем НОД(f,g) с помощью алгоритма Евклида:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
- & x^4 & +x^3 & -7x^2 & -x & +6 & x^3-4x \\
\cline{7-7}
 & x^4 & -0x^3 & -4x^2 & & & x\ +1 \\
\cline{2-4}
 & - & x^3 & -3x^2 & -x & & \\
 & & x^3 & -0x^2 & -4x & & \\
\cline{3-5}
 & & & -3x^2 & +3x & +6 &
\end{array}
$$

После первого деления получили, что $f=(x+1)g-3r_1$, где $r_1=x^2-x-2$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
- & x^3 & & -4x & & x^2-x-2 \\
\cline{6-6}
 & x^3 & -x^2 & -2x & & x\ +1 \\
\cline{2-4}
 & - & x^2 & -2x & & \\
 & & x^2 & -x & -2 & \\
\cline{3-5}
 & & & -x & +2 &
\end{array}
$$

Результатом второго деления является $g=(x+1)r_1-r_2$, где $r_2=x-2$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
- & x^2 & -x & -2 & x-2 \\
\cline{5-5}
 & x^2 & -2x & & x\ +1 \\
\cline{2-3}
 & - & x & -2 & \\
 & & x & -2 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Получили, что НОД$(f,g)=x-2$.

Теперь находим линейное представление НОД(f,g). Для этого выражаем r_2 через g и r_1, а потом выражаем r_1 через f и g:

$$r_2=(x+1)r_1-g=(x+1)\left(\frac{1}{3}(x+1)g-\frac{1}{3}f\right)-g=f\left(-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)+g\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right).$$

Таким образом, НОД$(f,g)=x-2=f\left(-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)+g\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)$.

7. Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби $\dfrac{2\alpha+1}{\alpha^2-2\alpha-1}$, где α – корень многочлена $f=x^3+2x-2$.

Решение: Требование задачи означает, что нужно представить данную дробь в виде суммы неотрицательных и по возможности меньших степеней числа α с рациональными коэффициентами. Заметим, что показатели степеней должны быть меньше $\deg f=3$, т.к. α^3 уже можно заменить на $-2\alpha+2$.

Обозначим $g = x^2 - 2x - 1$, $h = 2x + 1$, тогда данная дробь представится в виде $\dfrac{h(\alpha)}{g(\alpha)}$. Найдем многочлены u и v такие, чтобы $f\,u + g\,v = h$. Тогда $h(\alpha) = f(\alpha)u(\alpha) + g(\alpha)v(\alpha) = g(\alpha)v(\alpha)$, т.к. $f(\alpha) = 0$. Следовательно, $\dfrac{h(\alpha)}{g(\alpha)} = v(\alpha)$, и задача решена.

Для решения воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & +2x & -2 & x^2 - 2x - 1 \\ \cline{5-5}
-\;x^3 & -2x^2 & -x & & x + 2 \\ \cline{1-3}
& -\;2x^2 & +3x & -2 & \\
& 2x^2 & -4x & -2 & \\ \cline{2-4}
& & 7x & &
\end{array}
$$

$f = g\left(x+2\right) + 7r_1$, где $r_1 = x$.

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^2 & -2x & -1 & x \\ \cline{4-4}
-\;x^2 & & & x - 2 \\ \cline{1-2}
& -\;-2x & -1 & \\
& -2x & & \\ \cline{2-3}
& & -1 &
\end{array}
$$

$g = r_1\left(x-2\right) - r_2$, где $r_2 = 1$. Тем самым, НОД$(f, g) = \mathbf{1}$. Найдем линейное представление НОД(f, g):

$$r_2 = r_1\left(x-2\right) - g = \frac{1}{7}\left(f - g\left(x+2\right)\right)\left(x-2\right) - g = f\left(\frac{1}{7}x - \frac{2}{7}\right) + g\left(-\frac{1}{7}x^2 - \frac{3}{7}\right).$$ Следовательно,

$$v = \left(-\frac{1}{7}x^2 - \frac{3}{7}\right)h = \left(-\frac{1}{7}x^2 - \frac{3}{7}\right)\left(2x+1\right) = -\frac{2x^3 + x^2 + 6x + 3}{7}.$$ Для понижения степени достаточно из многочлена $2x^3 + x^2 + 6x + 3$ вычесть многочлен $2f$. Тогда

$$\frac{2\alpha + 1}{\alpha^2 - 2\alpha - 1} = -\frac{1}{7}\left(\alpha^2 + 2\alpha + 7\right).$$

ПРИМЕРЫ:

1. Найти кратность корня α в многочлене $f = x^7 - x^6 - 6x^5 + 2x^4 + 13x^3 + 3x^2 - 8x - 4$, $\alpha = -1$.

Решение: Для решения задачи воспользуемся схемой Горнера:

	1	–1	–6	2	13	3	–8	–4	
–1	1	–2	–4	6	7	–4	–4	0	– первый
–1	1	–3	–1	7	0	–4	0		– второй
–1	1	–4	3	4	–4	0			– третий
–1	1	–5	8	–4	0				– четвертый

-1		1	-6	14	-18

Искомая кратность равна 4.

2. Найти при каких a и b многочлен $f = ax^7 + bx^5 - 2$ делится на $(x-1)^2$.

Решение: Условие задачи означает, что 1 – является корнем кратности не меньшей 2, что равносильно утверждению $f(1) = f'(1) = 0$.

Найдем f': $f' = 7ax^6 + 5bx^4$, значения многочлена f и его производной f' при $x=1$: $f(1) = a + b - 2 = 0$, $f'(1) = 7a + 5b = 0$, откуда $a = -5$, $b = 7$.