ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

Е.А. Благовещенская

Конспект лекций

по дисциплине
«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.13)

для специальности
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации
«*Безопасность автоматизированных систем на железнодорожном транспорте*»

Форма обучения – очная

РАЗДЕЛ 6. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Санкт-Петербург 2023

Лекция 13.
Свойства линейных пространств. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского.

Из курса векторной алгебры известно, что свободные векторы на плоскости (и в пространстве) можно складывать и умножать на вещественные числа, причём эти операции обладают определёнными свойствами.

Многочлены с вещественными (комплексными) коэффициентами также можно складывать и умножать на вещественные (комплексные) числа, причём и эти операции обладают аналогичными свойствами.

В этой главе мы будем изучать множества элементов произвольной природы, для которых определены операции сложения и умножения на числа, причём эти операции обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над свободными векторами.

Такие множества обладают рядом общих свойств и называются линейными пространствами.

Понятие линейного пространства.

1. Определение поля.

Полем будем называть множество **K** элементов произвольной природы, для которого выполнены следующие три требования:

I. На множестве **K** определена операция сложения, т.е. имеется правило, с помощью которого любой упорядоченной паре (α,β) элементов этого множества ставится в соответствие **единственный** элемент γ этого множества, называемый их суммой, который будем обозначать так: $\gamma=\alpha+\beta$.

II. На множестве **K** определена операция умножения, т.е. имеется правило, с помощью которого любой упорядоченной паре (λ,μ) элементов этого множества ставится в соответствие **единственный** элемент ω этого множества, называемый их произведением, который будем обозначать так: $\omega=\lambda\cdot\mu$.

III. Эти операции подчиняются следующим 9 аксиомам:

1.Коммутативность сложения. Для любых элементов $\alpha,\beta\in$ **K** справедливо равенство:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

2. Ассоциативность сложения. Для любых элементов $\alpha,\beta,\gamma\in$ **K** справедливо равенство:

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$$

3. Существование нулевого элемента. Среди элементов множества **K** существует элемент, обозначаемый так: 0 и называемый нулевым, такой, что для любого элемента $\alpha\in$ **K** справедливо равенство:

$$\alpha+0=\alpha$$

4. Существование противоположного элемента. Для любого элемента $\alpha\in$ **K** существует элемент множества **K**, обозначаемый так: $-\alpha$ и называемый противоположным к α, и такой, что справедливо равенство:

$$\alpha+(-\alpha)=0$$

5. Коммутативность умножения. Для любых элементов $\alpha,\beta\in$ **K** справедливо равенство:

$$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$$

6.Ассоциативность умножения. Для любых элементов $\alpha,\beta,\gamma\in$ **K** справедливо равенство:

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$$

7. Дистрибутивность. Для любых элементов $\alpha,\beta,\gamma\in$ **K** справедливо равенство:

$$(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$$

8. Существование единицы. Среди элементов множества **K** существует элемент, обозначаемый так: 1 и называемый единицей, такой, что для любого элемента $\alpha\in$ **K** справедливо равенство:

$$\alpha\cdot 1=\alpha$$

9. Существование обратного элемента. Для любого элемента $\alpha\in$ **K ,** не равного нулевому**,** существует элемент, обозначаемый так: α^{-1} и называемый обратным к α, и такой, что справедливо равенство:

$$\alpha\cdot(\alpha^{-1})=1$$

Замечание 1. Элементы поля в дальнейшем будем называть числами.

Пример 1. Множество вещественных чисел ***R***, очевидно, является полем.
Пример 2. Множество комплексных чисел **C**, очевидно, является полем.
Пример 3. Множество рациональных чисел **Q**, очевидно, является полем. Напомним, что рациональное число - это такое, которое можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где m и n - целые числа.
Пример 4. Множество $\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2},\quad a,b\in\ \mathbf{Q}\}$ также является полем. Докажите это утверждение.
Пример 5. Множество **Z,** состоящее из всех целых чисел, не является полем, т.к. не выполняется аксиома 9.
Например, для числа 2 нет обратного, т.е. такого **целого** числа α, чтобы выполнялось равенство $2\cdot\alpha=1$.

Пример 6. Множество $\mathbf{K}_1$ всех квадратных матриц вида $\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$, где $a,b\in$ ***R*** является полем.
На этом множестве определены операции сложения и умножения. Очевидно, нулевым элементом является нулевая матрица $O=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, которая принадлежит $\mathbf{K}_1$. Единичная матрица $E=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, которая также принадлежит $\mathbf{K}_1$, исполняет роль единицы. Действительно, ранее было доказано, что для любой квадратной матрицы A второго порядка справедливы равенства $A+O=A$ и $A\cdot E=A$. В частности, эти равенства выполняются и для матриц из множества $\mathbf{K}_1$**.** Кроме того, для любой матрицы $A=\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ противоположной служит матрица $-A=\begin{pmatrix} -a & -b\\ b & -a\end{pmatrix}\in\mathbf{K}_1$. Следовательно, аксиома 4 также выполнена. Остальные аксиомы, за исключением 5-ой, и 9-ой выполняются для всех квадратных матриц

второго порядка, в частности, эти аксиомы выполняются и для матриц из множества $\mathbf{K}_1$.
Покажем, что на множестве $\mathbf{K}_1$ умножение коммутативно. Вычислим

$$A\cdot A_1=\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ -b_1 & a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\cdot a_1-b\cdot b_1 & a\cdot b_1+b\cdot a_1\\ -b\cdot a_1-a\cdot b_1 & -b\cdot b_1+a\cdot a_1\end{pmatrix}$$ и

$$A_1\cdot A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ -b_1 & a_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1\cdot a-b_1\cdot b & a_1\cdot b+b_1\cdot a\\ -b_1\cdot a-a_1\cdot b & -b\cdot b_1+a\cdot a_1\end{pmatrix}=A\cdot A_1$$ для

любых матриц $A, A_1 \in \mathbf{K}_1$.

Покажем, что для любой ненулевой матрицы $A=\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\in \mathbf{K}_1$ существует обратная матрица, принадлежащая $\mathbf{K}_1$. Действительно, матрица $A^{-1}=\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\in \mathbf{K}_1$. Таким образом, множество $\mathbf{K}_1$ относительно обычных операций сложения и умножения матриц является полем.

Пример 7. Пусть множество $\mathbf{Z}_2$ состоит из двух элементов, которые будем обозначать так: 1 и 0.
Операцию сложения на этом множестве зададим так:
$0+0=0;\quad 0+1=1;\quad 1+0=1;\quad 1+1=0$.
Операцию умножения на этом множестве зададим так:
$0\cdot 0=0;\qquad 0\cdot 1=0;\qquad 1\cdot 0=0;\qquad 1\cdot 1=1$.
Легко проверить, что множество $\mathbf{Z}_2$ является полем, которое называют полем из двух элементов. Заметим, что существуют и другие поля, содержащие конечное число элементов.

Замечание 2. Для матриц одинакового строения с элементами из поля **K** определена операция сложения (см. глава III§2).
Замечание 3. Для матриц с элементами из поля **K** определена операция умножения на числа, т.е. элементы поля **K** . Для этих операций сложения матриц и умножения их на числа поля **K** справедливы **8** свойств (см. глава III§2).
Замечание 4. Для матриц с элементами из поля **K** согласованного строения определена операция умножения, причём эта операция удовлетворяет 6 свойствам (см. глава III§3).

Справедливость этих утверждений предлагается проверить самостоятельно в качестве упражнения. В дальнейшем мы будем пользоваться этими утверждениями.

2. Определение линейного пространства.

Множество $\mathcal{X}$ элементов произвольной природы будем называть **линейным пространством над полем**
K, если для него выполнены следующие три требования:

I. На множестве $\mathcal{X}$ определена операция сложения, т.е. имеется правило, с помощью которого любой упорядоченной паре $(\vec{x}, \vec{y})$ элементов этого множества ставится в соответствие **единственный** элемент $\vec{z}$ этого множества, называемый их суммой, который будем обозначать так: $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$.

II. На множестве $\mathcal{X}$ определена операция умножения на числа, т.е. на элементы поля **K**. Это означает, что имеется правило, с помощью которого любому числу $\lambda \in$ **K** и любому элементу $\vec{x} \in \mathcal{X}$ ставится в соответствие **единственный** элемент $\vec{v}$ множества $\mathcal{X}$**,** называемый их произведением, который будем обозначать так: $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{x}$ или так: $\vec{v} = \vec{x} \cdot \lambda$.

III. Эти операции подчиняются следующим 8 аксиомам:

1.Коммутативность сложения. Для любых элементов $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{X}$**,** справедливо равенство:

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$

2. Ассоциативность сложения. Для любых элементов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{X}$**,**справедливо равенство:

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$$

3. Существование нулевого элемента. Среди элементов множества $\mathcal{X}$ существует элемент, обозначаемый так: $\vec{0}$ и называемый нулевым, такой, что для любого элемента $\vec{x} \in \mathcal{X}$**,** справедливо равенство:

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$$

4. Существование противоположного элемента. Для любого элемента $\vec{x} \in \mathcal{X}$ **,**существует элемент множества $\mathcal{X}$ **,**обозначаемый так: $\vec{x}'$ и называемый противоположным к $\vec{x}$, и такой, что справедливо равенство:

$$\vec{x} + \vec{x}' = \vec{0}$$

5. Для любого элемента $\vec{x} \in \mathcal{X}$ **,** справедливо равенство:

$1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$, где 1- единица поля **K.**

6. Дистрибутивность относительно сложения векторов. Для любых элементов $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{X}$ **,** и для любого числа $\alpha \in$ **K** справедливо равенство:

$$\alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$$

7. Дистрибутивность относительно сложения чисел. Для любых чисел $\alpha, \beta \in$ **K** и для любого элемента $\vec{x} \in \mathcal{X}$ справедливо равенство:

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$$

8. Для любых чисел $\alpha, \beta \in$ **K** и для любого элемента $\vec{x} \in \mathcal{X}$ справедливо равенство:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x})$$

Замечание 1. Линейное пространство над полем **K** называют также векторным пространством над полем **K.**

Если по смыслу ясно, о каком поле идёт речь, или неважно каково поле **K,** то иногда $\mathcal{X}$ будем называть просто линейным пространством.

Замечание 2. Элементы линейного пространства будем, как правило, обозначать маленькими буквами латинского алфавита, снабжёнными сверху стрелкой, и называть векторами. Элементы поля **K**, т.е. числа, будем обозначать греческими буквами. Разумеется, будут и отступления от этих договорённостей.

Пример 1. Из курса векторной алгебры известно, что множества V_2 и V_3 свободных векторов на плоскости и в пространстве соответственно, являются линейными пространствами над полем вещественных чисел относительно имеющихся там операций сложения и умножения на вещественное число.

Пример 2. Из свойств действий над матрицами следует, что $\mathcal{X} = M_{mn}(\mathbf{K})$ является линейным пространством над полем **K** относительно имеющихся там операций сложения и умножения на числа поля **K.** В частности, множества $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}_n$, $M_n(\mathbf{K})$ являются линейными пространствами над полем **K** относительно имеющихся там операций сложения и умножения на числа поля **K.**

Пример 3. Множество $\mathcal{X} = \mathbf{R}[t]$ всех многочленов от буквы t с вещественными коэффициентами является вещественным линейным пространством (или линейным пространством над полем **R**).

Пример 4. Множество $\mathcal{X} = C([a,b])$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций является вещественным линейным пространством, если сложение и умножение на вещественные числа определить так:

$$(f+g)(x) \overset{def}{=} f(x)+g(x) \text{ для любого } x \in [a,b];$$

$$(\lambda \cdot f)(x) \overset{def}{=} \lambda \cdot f(x) \text{ для любого } x \in [a,b] \text{ и любого } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Пример 5. Множество $\mathcal{X} = \mathbf{R}_n[t]$ всех многочленов от буквы t с вещественными коэффициентами степени не превосходящей n, является вещественным линейным пространством (или линейным пространством над полем **R**).

Замечание 3. Определение умножения матриц будем использовать и в случае, когда их строение согласовано известным образом (см. глава III§3), причём элементами одной матрицы являются векторы линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K,** а элементами другой матрицы – числа, т.е. элементы поля **K.**

В качестве упражнения предлагается доказать, что и в этом случае для умножения матриц справедливы 6 свойств (см. глава III§3).

3. Некоторые свойства линейных пространств.

Теорема 1. В любом линейном пространстве нулевой вектор единственный.

Доказательство. Пусть $\vec{0}_1, \vec{0}_2 \in \mathcal{X}$, причём для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{X}$, справедливы равенства

$\vec{x} = \vec{x} + \vec{0}_1$ и $\vec{y} = \vec{y} + \vec{0}_2$, т.е. и вектор $\vec{0}_1$, и вектор $\vec{0}_2$ являются нулевыми векторами пространства $\mathcal{X}$. Отсюда получаем: $\vec{0}_1 = \vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_2 + \vec{0}_1 = \vec{0}_2$. Здесь мы воспользовались коммутативностью сложения, а также приведёнными равенствами, положив $\vec{y} = \vec{0}_1; \quad \vec{x} = \vec{0}_2$. Теорема доказана.

Теорема 2. Для любого вектора $\vec{x}$ линейного пространства $\mathcal{X}$ противоположный к нему вектор единственный.
Доказательство. Пусть $\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'' \in \mathcal{X}$, причём $\vec{x} + \vec{x}' = \vec{0}$ и $\vec{x} + \vec{x}'' = \vec{0}$. Отсюда следует, что

$\vec{x}'' = \vec{x}'' + \vec{0} = \vec{x}'' + (\vec{x} + \vec{x}') = (\vec{x}'' + \vec{x}) + \vec{x}' = \vec{0} + \vec{x}' = \vec{x}'$. Здесь мы воспользовались, кроме приведённых равенств ещё 2-ой и 3-ей аксиомами. Теорема доказана.

Теорема 3. Для любого вектора $\vec{x}$ линейного пространства $\mathcal{X}$ справедливо равенство $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Доказательство. Воспользуемся аксиомой 7: $0 \cdot \vec{x} = (0+0) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}$. Пусть $\vec{x}''$ - вектор, противоположный к вектору $0 \cdot \vec{x}$, т.е. $0 \cdot \vec{x} + \vec{x}'' = \vec{0}$. Используем полученное равенство
$0 \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}$. В результате получим: $\vec{0} = \vec{x}'' + 0 \cdot \vec{x} = \vec{x}'' + (0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}) =$
$= (\vec{x}'' + 0 \cdot \vec{x}) + 0 \cdot \vec{x} = \vec{0} + 0 \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} \Leftrightarrow 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Здесь мы воспользовались аксиомами 1, 2 и 3.
Теорема доказана.

Теорема 4. Вектор, противоположный к вектору $\vec{x}$ линейного пространства $\mathcal{X}$, равен вектору $(-1) \cdot \vec{x}$.

Доказательство. Действительно, вектор $(-1) \cdot \vec{x}$ удовлетворяет аксиоме 4:
$\vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = [1 + (-1)] \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Здесь мы воспользовались аксиомами 5, 7 и теоремой 3. Из теоремы 2 следует, что вектор, противоположный к вектору $\vec{x}$, равен $(-1) \cdot \vec{x}$. Теорема доказана.
Замечание. В дальнейшем вектор, противоположный к вектору $\vec{x}$, будем обозначать так: $-\vec{x}$.
Задача 1. Докажите, что если $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$, то или $\lambda = 0$, или $\vec{x} = \vec{0}$.

Задача 2. Докажите, что $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ для любого числа $\lambda \in$ **K.**

§2 Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов.

Определение 1. Пусть $\mathcal{X}$ - линейное пространство над полем **K,** $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m \in \mathcal{X}$ **,** $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in \mathbf{K}$. Выражение вида $\lambda_1\vec{x}_1+\ldots+\lambda_m\vec{x}_m$ будем называть **линейной комбинацией** векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$ с **коэффициентами** $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$.

Запись: $\vec{x}=\text{ЛК}(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m)$ будет означать, что вектор $\vec{x}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$.

Замечание. Очевидно, линейная комбинация линейных комбинаций векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$ также является
линейной комбинацией этих векторов, т.к.
$\beta_1(\lambda_{11}\vec{x}_1+\ldots+\lambda_{1m}\vec{x}_m)+\ldots+\beta_s(\lambda_{s1}\vec{x}_1+\ldots+\lambda_{sm}\vec{x}_m)=$
$=(\beta_1\cdot\lambda_{11}+\ldots+\beta_s\cdot\lambda_{s1})\vec{x}_1+\ldots+(\beta_1\cdot\lambda_{1m}+\ldots+\beta_s\cdot\lambda_{sm})\vec{x}_m$. Какими аксиомами линейного пространства мы здесь воспользовались?

Определение 2 . Пусть $\mathcal{X}$ - линейное пространство над полем **K** . Множество всех линейных комбинаций векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m \in \mathcal{X}$ будем называть **линейной оболочкой, натянутой на векторы** $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$ и обозначать так: $<\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m>$. Таким образом,

$$<\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m> \overset{def}{=} \{\lambda_1\vec{x}_1+\ldots+\lambda_m\vec{x}_m;\quad \lambda_1,\ldots,\lambda_m \in \mathbf{K}\}.$$

Очевидно, $<\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m> \subseteq \mathcal{X}$ **.**

Определение 3. Совокупность векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m \in \mathcal{X}$ будем называть **линейно зависимой**, если существуют числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in \mathbf{K}$, не равные нулю одновременно и такие, что $\lambda_1\vec{x}_1+\ldots+\lambda_m\vec{x}_m=\vec{0}$.

В противном случае совокупность $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$ будем называть **линейно независимой**.

Таким образом, одна и та же совокупность векторов не может быть одновременно и линейно зависимой, и
линейно независимой.
Приведём ещё одно определение линейно независимой системы векторов, разумеется, равносильное предыдущему.
Определение 4. Совокупность векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m \in \mathcal{X}$ будем называть **линейно независимой**, если
из равенства нулевому вектору их линейной комбинации следует равенство нулю всех коэффициентов этой линейной комбинации, т.е. из равенства $\lambda_1\vec{x}_1+\ldots+\lambda_m\vec{x}_m=\vec{0}$ следует, что $\lambda_1=\ldots=\lambda_m=0$.

Замечание. Линейную комбинацию этих векторов можно записать используя определение умножения матриц: $\lambda_1\vec{x}_1+\ldots+\lambda_m\vec{x}_m=\Lambda\cdot X$, где $\Lambda=(\lambda_1\ldots\lambda_m)$, а $X=(\vec{x}_1\ldots\vec{x}_m)^T$. Тогда определение линейно независимой совокупности векторов $X=(\vec{x}_1\ldots\vec{x}_m)^T$ можно записать так: $\Lambda\cdot X=\vec{0}\Rightarrow\Lambda=0$.

Пример 1. Пусть $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$. Очевидно, справедливо равенство: $2A_1 + A_2 - A_3 = O$. Следовательно, совокупность матриц A_1, A_2, A_3 линейно зависимая по определению 3. В этом примере мы рассматриваем матрицы A_1, A_2, A_3 как векторы вещественного линейного пространства $M_2(\boldsymbol{R})$.

Пример 2. Покажем, что совокупность векторов

$\vec{e}_1 = (1\ \ 0\ldots0)^T, \quad \vec{e}_2 = (0\ \ 1\ldots0)^T, \ldots, \vec{e}_n = (0\ \ 0\ldots1)^T$

вещественного пространства $\mathcal{X} = \mathbf{R}_n$ строк длины n линейно независимая.

Составим линейную комбинацию этих векторов и приравняем её к нулевому вектору:

$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{0} \Leftrightarrow (\lambda_1\ \ \lambda_2\ldots\lambda_n) = (0\ \ 0\ldots0)$. Из определения равенства матриц отсюда следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 \ldots = \lambda_n = 0$. Таким образом, по определению 4 эта совокупность линейно независимая.

Пример 3. Покажем, что совокупность матриц

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ линейно независимая. Составим линейную комбинацию этих матриц и приравняем её к нулевой матрице:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = O \Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = O \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 & 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 & 4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Легко подсчитать ранг матрицы этой системы: $r\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$. Следовательно, эта система имеет единственное решение, т.е. нулевое (ранг матрицы системы равен числу неизвестных).

Итак, из равенства $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = O$ следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Следовательно, по определению 4 эта совокупность матриц линейно независимая. В этом примере мы рассматриваем матрицы A_1, A_2, A_3 как векторы вещественного линейного пространства $M_2(\boldsymbol{R})$.

Пример 4. Множество $\mathcal{X}$ **=C**$_2$ комплексных строк длины 2 является вещественным линейным пространством, потому что такие строки можно складывать и умножать на вещественные числа, и при этом выполняются все 8 аксиом линейного пространства. Покажем, что совокупность строк

$\vec{x}_1 = (2+i \quad 3-2i), \quad \vec{x}_2 = (-1+2i \quad 2+3i)$ этого пространства линейно независимая.

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1(2+i \quad 3-2i) + \lambda_2(-1+2i \quad 2+3i) = (0 \quad 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2\lambda_1 + \lambda_1 i \quad 3\lambda_1 - 2\lambda_1 i) + (-\lambda_2 + 2\lambda_2 i \quad 2\lambda_2 + 3\lambda_2 i) = (0 \quad 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ([(2\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 + 2\lambda_2)i] \quad [(3\lambda_1 + 2\lambda_2) + (-2\lambda_1 + 3\lambda_2)i]) = (0 \quad 0) \Leftrightarrow$$

Пусть

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 + 2\lambda_2)i = 0 \\ (3\lambda_1 + 2\lambda_2) + (-2\lambda_1 + 3\lambda_2)i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

В этой выкладке важно, что числа λ_1 и λ_2 вещественные, т.к. $\mathcal{X}$– вещественное пространство по условию.

Пример 5. Множество $\mathcal{X}_1$ $=\mathbf{C}_2$ комплексных строк длины 2 является комплексным линейным пространством, потому что такие строки можно складывать и умножать на комплексные числа, и при этом выполняются все 8 аксиом линейного пространства. Заметим, что пространство $\mathcal{X}$ из примера 4 и пространство $\mathcal{X}_1$ различные, несмотря на то, что как множества они равны.

Покажем, что совокупность строк $\vec{x}_1 = (2+i \quad 3-2i), \quad \vec{x}_2 = (-1+2i \quad 2+3i)$ этого пространства линейно зависимая. Действительно,

$i \cdot \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = (2i-1 \quad 3i+2) - (-1+2i \quad 2+3i) = (0 \quad 0) = \vec{0}$,

причём $i \neq 0, -1 \neq 0$.

В предыдущем примере мы не могли взять в качестве коэффициента число i, т.к. пространство $\mathcal{X}$ является вещественным.

Теорема 1. Совокупность векторов линейного пространства, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

Доказательство. Пусть i -ый вектор в совокупности векторов $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m \in \mathcal{X}$ нулевой, т.е. $\vec{x}_i = \vec{0}$. Тогда, очевидно, справедливо равенство

$0 \cdot \vec{x}_1 + \ldots + 1 \cdot \vec{x}_i + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_m = \vec{0}$, причём 1- i -ый коэффициент не равен 0.

Таким образом, совокупность векторов $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$ линейно зависимая по определению 3.

Теорема 2. Если к линейно зависимой совокупности векторов линейного пространства добавить ещё несколько, то получившаяся совокупность будет также линейно зависимая.

Доказательство. Пусть совокупность векторов $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m \in \mathcal{X}$ линейного пространства над полем **K** линейно зависимая, т.е. существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in$ **K**

, не равные нулю одновременно и такие, что $\lambda_1\vec{x}_1+\ldots+\lambda_m\vec{x}_m=\vec{0}$. Покажем, что тогда совокупность векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m,\vec{x}_{m+1},\ldots,\vec{x}_{m+k}\in\mathcal{X}$ также линейно зависимая.

Действительно, очевидно, справедливо равенство
$\lambda_1\vec{x}_1+\ldots+\lambda_m\vec{x}_m+0\cdot\vec{x}_{m+1}+\ldots+0\cdot\vec{x}_{m+k}=\vec{0}$, причём не все коэффициенты этой линейной комбинации равны 0, т.к. не все коэффициенты $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ равны нулю.
Следовательно, совокупность векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m,\vec{x}_{m+1},\ldots,\vec{x}_{m+k}$ линейно зависимая по определению 3.

Теорема 3. Если из линейно независимой совокупности векторов удалить несколько, то получившаяся совокупность будет также линейно независимой.

Доказательство проведём от противного с использованием теоремы 2. Пусть совокупность векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m,\vec{x}_{m+1},\ldots,\vec{x}_{m+k}\in\mathcal{X}$ линейно независимая, а совокупность $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$ линейно зависимая.
Тогда по теореме 2 исходная совокупность векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m,\vec{x}_{m+1},\ldots,\vec{x}_{m+k}$ будет также линейно зависимая, что противоречит условию, и теорема доказана.

Теорема 4. Критерий линейной зависимости. Для того чтобы совокупность векторов линейного пространства была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы один из векторов этой совокупности был линейной комбинацией остальных.
Доказательство.
Необходимость. Пусть совокупность векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m\in\mathcal{X}$ линейного пространства над полем **K** линейно зависимая, т.е. существуют числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m\in$ **K**, не равные нулю одновременно и такие, что $\lambda_1\vec{x}_1+\ldots+\lambda_i\vec{x}_i+\ldots+\lambda_m\vec{x}_m=\vec{0}$, и пусть для определённости $\lambda_i\neq 0\ (1\le i\le m)$. Тогда из последнего равенства получаем:

$$\vec{x}_i=-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\vec{x}_1-\ldots-\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\vec{x}_{i-1}-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\vec{x}_{i+1}-\ldots-\frac{\lambda_m}{\lambda_i}\vec{x}_m,$$

и необходимость доказана.
Достаточность. Пусть $\vec{x}_i=\alpha_1\vec{x}_1+\ldots+\alpha_{i-1}\vec{x}_{i-1}+\alpha_{i+1}\vec{x}_{i+1}+\ldots+\alpha_m\vec{x}_m,\ \ (1\le i\le m)$. Тогда справедливо равенство: $\alpha_1\vec{x}_1+\ldots+\alpha_{i-1}\vec{x}_{i-1}-1\cdot\vec{x}_i+\alpha_{i+1}\vec{x}_{i+1}+\ldots+\alpha_m\vec{x}_m=\vec{0}$, причем $-1\neq 0$.
Следовательно, совокупность векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$ линейно зависимая по определению 3, и достаточность доказана.

Теорема 5. Если после добавления к линейно независимой совокупности векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$ линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K** вектора $\vec{x}_{m+1}\in\mathcal{X}$ новая совокупность $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m,\vec{x}_{m+1}$ становится линейно зависимой, то добавленный вектор $\vec{x}_{m+1}$ есть линейная комбинация элементов исходной совокупности, т.е.

$$\vec{x}_{m+1}=\text{ЛК}(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m).$$

Доказательство. По условию совокупность $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m,\vec{x}_{m+1}$ линейно зависимая. Это означает, что существуют числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\lambda_{m+1}\in$ **K**, не равные нулю одновременно и такие, что

$$\lambda_1\vec{x}_1+\ldots+\lambda_m\vec{x}_m+\lambda_{m+1}\vec{x}_{m+1}=\vec{0} \qquad (1)$$

Покажем, что $\lambda_{m+1}\neq 0$. Пусть это не так, т.е. $\lambda_{m+1}=0$. Из равенства (1) следует, что $\lambda_1\vec{x}_1+\ldots+\lambda_m\vec{x}_m=\vec{0}$, причём среди чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ есть ненулевые. Действительно, $\lambda_{m+1}=0$, а $\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\lambda_{m+1}$ не равны нулю одновременно. Из определения 3 следует, что совокупность $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$ линейно зависимая, а это противоречит условию.

Таким образом, доказали, что $\lambda_{m+1}\neq 0$. Тогда из равенства (1) получаем: $\vec{x}_{m+1}=-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}}\vec{x}_1-\ldots-\dfrac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}}\vec{x}_m$, и теорема 5 доказана.

Теорема 6. О линейной зависимости линейных комбинаций.

Пусть даны векторы $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m\in\mathcal{X}$ линейного пространства над полем **K** и пусть векторы $\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_k$ являются линейными комбинациями векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$. Тогда если $k>m$, то совокупность $\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_k$ линейно зависимая, т е. если число линейных комбинаций больше числа комбинируемых векторов, то эти линейные комбинации линейно зависимы.

Доказательство проведём методом математической индукции по числу комбинируемых элементов,
т.е. по m.

База математической индукции. Пусть $m=1$. Тогда по условию $\vec{y}_1=c_1\vec{x}_1,\ldots,\vec{y}_k=c_k\vec{x}_1$. Если $c_1=0$, то $\vec{y}_1=\vec{0}$, и совокупность $\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_k$ линейно зависимая по теореме 1. Если $c_1\neq 0$, то $\vec{y}_2=c_2\vec{x}_1=\dfrac{c_2}{c_1}\cdot\left(c_1\vec{x}_1\right)=\dfrac{c_2}{c_1}\vec{y}_1$, и совокупность $\vec{y}_1,\vec{y}_2$ линейно зависимая по теореме 4, т.к. $\vec{y}_2=\text{ЛК}(\vec{y}_1)$.

Следовательно, совокупность $\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_k$ линейно зависимая по теореме 2, и база доказана.

Индукционный переход. Докажем, что утверждение теоремы справедливо для случая, когда число комбинируемых векторов равно m, если оно верно для случая, когда число комбинируемых векторов равно $m-1$. Пусть

$$\begin{array}{l}\vec{y}_1=c_{11}\vec{x}_1+c_{12}\vec{x}_2+\ldots+c_{1m}\vec{x}_m,\\ \vec{y}_2=c_{21}\vec{x}_1+c_{22}\vec{x}_2+\ldots+c_{2m}\vec{x}_m,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \vec{y}_k=c_{k1}\vec{x}_1+c_{k2}\vec{x}_2+\ldots+c_{k\,m}\vec{x}_m\end{array}.$$

Если $c_{1m}=c_{2m}=\ldots=c_{k\,m}=0$, то $\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_k$ являются линейными комбинациями $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_{m-1}$, и, следовательно, совокупность $\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_k$ линейно зависимая по индукционному предположению. Пусть теперь один из этих коэффициентов, например, $c_{1m}\neq 0$ не равен нулю.

Рассмотрим теперь совокупность векторов $\vec{z}_2,\ldots,\vec{z}_k$ таких, что:

$$\vec{z}_2 = \vec{y}_2 - \frac{c_{2m}}{c_{1m}}\vec{y}_1 = \left(c_{21} - \frac{c_{2m}}{c_{1m}}c_{11}\right)\vec{x}_1 + \left(c_{22} - \frac{c_{2m}}{c_{1m}}c_{12}\right)\vec{x}_2 + \ldots + \left(c_{2(m-1)} - \frac{c_{2m}}{c_{1m}}c_{1(m-1)}\right)\vec{x}_{m-1}$$

……………………………………………………………………………………… .

$$\vec{z}_k = \vec{y}_k - \frac{c_{km}}{c_{1m}}\vec{y}_1 = \left(c_{k1} - \frac{c_{km}}{c_{1m}}c_{11}\right)\vec{x}_1 + \left(c_{k2} - \frac{c_{km}}{c_{1m}}c_{12}\right)\vec{x}_2 + \ldots + \left(c_{k(m-1)} - \frac{c_{km}}{c_{1m}}c_{1(m-1)}\right)\vec{x}_{m-1}$$

Эта совокупность является линейно зависимой по индукционному предположению, т.к. $\vec{z}_i = \text{ЛК}(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_{m-1}), \quad 2 \le i \le k$, причём число линейных комбинаций $k-1$ больше числа комбинируемых элементов $m-1$, т.к. $k > m$. Следовательно, существуют числа $\lambda_2,\ldots,\lambda_k \in \mathbf{K}$, не равные нулю одновременно и такие, что $\lambda_2\vec{z}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{z}_k = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_2\left(\vec{y}_2 - \frac{c_{2m}}{c_{1m}}\vec{y}_1\right) + \ldots + \lambda_k\left(\vec{y}_k - \frac{c_{km}}{c_{1m}}\vec{y}_1\right) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\left(\lambda_2\frac{c_{2m}}{c_{1m}} + \ldots + \lambda_k\frac{c_{km}}{c_{1m}}\right)\vec{y}_1 + \lambda_2\vec{y}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{y}_k = \vec{0}.$$

Отсюда следует, что совокупность $\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_k$ линейно зависимая, т.к. коэффициенты $\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ не равны нулю одновременно. В этом случае величина первого коэффициента не имеет значения, т.к. ненулевой коэффициент имеется среди последних $k-1$ коэффициентов. Теорема 6 доказана.

Конечномерные линейные пространства.

Пусть $\mathcal{X}$ - линейное пространство над полем **K,** S - некоторая совокупность векторов из $\mathcal{X}$**.** Очевидно, линейная оболочка, натянутая на векторы из совокупности S является подмножеством линейного пространства $\mathcal{X}$, т.е. $< S > \subseteq \mathcal{X}$**.**

Определение 1. Совокупность S векторов линейного пространства $\mathcal{X}$ называется **порождающей** (или полной, или системой образующих) этого пространства, если каждый вектор этого пространства является линейной комбинацией векторов этой совокупности, т.е.
(S - порождающая совокупность линейного пространства $\mathcal{X}$) $\Leftrightarrow < S > = \mathcal{X}$**.**

Определение 2. Если в линейном пространстве $\mathcal{X}$ существует **конечная** порождающая система векторов, то пространство $\mathcal{X}$ называется **конечномерным.** В противном случае – **бесконечномерным.**
($\mathcal{X}$ – конечномерное) $\Leftrightarrow (\exists \vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m \in \mathcal{X} : \mathcal{X} = < \vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m >)$
Замечание. В конечномерном линейном пространстве не существует сколь угодно больших (по числу векторов) линейно независимых совокупностей векторов.
Пусть $\mathcal{X} = < \vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m >$. Тогда любой вектор $\vec{y} \in \mathcal{X}$ есть линейная комбинация векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$.

Следовательно, по теореме 6 §2 любая совокупность векторов, содержащая более чем m векторов, будет линейно зависимой.

Пример 1. Покажем, что пространство $\mathcal{X} = \boldsymbol{R}_n$ вещественных строк длины n является конечномерным вещественным пространством. Действительно, любая строка $\vec{x}$ из этого пространства имеет вид: $\vec{x} = (\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_n)$, где $\alpha_i \in$ $\boldsymbol{R}$, $i = \overline{1,n}$.
Следовательно, $\vec{x} = (\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_n) = \alpha_1(1\,0\dots0) + \alpha_2(0\,1\dots0) + \dots + \alpha_n(0\,0\dots1) =$
$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \dots + \alpha_n\vec{e}_n$,
т.е. $\mathcal{X} = <\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n>$.(Обозначения из примера 2 §2).
Пример 2. Покажем, что пространство $\mathcal{X} = M_2(\mathbf{C})$ квадратных комплексных матриц порядка 2 является конечномерным комплексным пространством. Любая квадратная комплексная матрица A порядка 2 имеет вид: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, где $a_{ij} \in$ **C,** $i, j = 1, 2$. Следовательно, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, и совокупность матриц $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ является порождающей для пространства $\mathcal{X} = M_2(\mathbf{C})$. Следовательно, $\mathcal{X} = M_2(\mathbf{C})$ - конечномерное комплексное пространство.

Пример 3. Покажем, что пространство всех многочленов с вещественными коэффициентами, т.е.
$\mathcal{X} = \mathbf{R}[t] = \{a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0,\quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}.\ a_i \in \mathbf{R},\quad i = \overline{0,n}\}$ является бесконечномерным вещественным пространством. Доказательство проведём от противного. Пусть в пространстве $\mathcal{X}$ существует конечная порождающая система $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$. Это означает, что любой многочлен $f(t) \in \mathcal{X}$ имеет вид:
$f(t) = b_1 f_1(t) + b_2 f_2(t) + \dots + b_m f_m(t)$, где $b_i \in$ **R,** $i = \overline{1,m}$.
Тогда, очевидно, $deg\ f(t)$ - степень многочлена $f(t)$ не превосходит наибольшей из степеней многочленов $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$, т.е.
$deg\ f(t) \le \max(deg\ f_1(t), deg\ f_2(t), \dots, deg\ f_m(t)) = k$.
Таким образом, степень любого многочлена не превосходит числа k, что, конечно, неверно, т.к. $\deg t^{k+1} = k + 1 > k$. Следовательно, наше предположение неверно, и в пространстве $\mathcal{X}$ не существует конечной порождающей системы. Таким образом, $\mathcal{X}$ - бесконечномерное вещественное пространство.

Пример 4. Вещественное линейное пространство $\mathcal{X} = C([a,b])$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций (пример 4 из §1) также является бесконечномерным линейным пространством.

Теорема 1. Все **линейно независимые и порождающие** системы векторов одного и того же конечномерного линейного пространства над полем **K** содержат **одинаковое количество** векторов.

Доказательство. Пусть $\mathcal{X} =< \vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m >$ и $\mathcal{X} =< \vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_k >$, причём совокупности векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$
и $\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_k$ линейно независимые. Докажем от противного, что $k = m$. Пусть $k < m$. Любой вектор $\vec{z}$ этого пространства есть линейная комбинация векторов совокупности $\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_k$, т.к. она порождающая. В частности, каждый вектор $\vec{x}_i$ =ЛК $(\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_k)$, $i = \overline{1,m}$. Число m линейных комбинаций векторов $\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_k$ больше числа комбинируемых. Следовательно, по теореме 6 §2 совокупность векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$ линейно зависимая, что противоречит её линейной независимости. Таким образом, $k \geq m$. Аналогично доказываем, что $k \leq m$, откуда и получаем равенство $k = m$.

Определение 3. Упорядоченная, линейно независимая и порождающая система векторов конечномерного линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K** называется **базисом** этого пространства. Число векторов в базисе будем называть размерностью этого пространства и обозначать так: $\dim\mathcal{X}$**.**

Если мы хотим подчеркнуть, что $\mathcal{X}$ - линейное пространство над полем **K,** то его размерность будем обозначать ещё и так: $\dim_{\mathbf{K}}\mathcal{X}$**.**

Корректность этого определения следует из теоремы 1. Далее мы будем изучать только конечномерные линейные пространства.

Пример 5. В примере 2 §2 мы показали, что совокупность строк $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n)$, где $\vec{e}_1 = (1\,0\ldots0), \vec{e}_2 = (0\,1\ldots0),\ldots,\vec{e}_n = (0\,0\ldots1)$, линейно независимая, а в примере 1 §3 доказали, что эта совокупность порождающая для пространства $\boldsymbol{R}_n$ - вещественных строк длины n. Следовательно, $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n)$ - базис $\boldsymbol{R}_n$ и $\dim\boldsymbol{R}_n$ = n.

Пример 6. Докажите, что базисом пространства вещественных квадратных матриц второго порядка, т.е.
пространства $\mathcal{X} = M_2(\boldsymbol{R})$ является упорядоченная совокупность матриц $e = (A_1, A_2, A_3, A_4)$, где
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, $\dim M_2(\boldsymbol{R})$ =4.

Пример 7. Докажите, что базисом пространства всех многочленов от буквы t с вещественными коэффициентами степени не превосходящей 3, т.е. базисом $\mathcal{X} = \mathbf{R}_3[t]$ является совокупность $e = (1, t, t^2, t^3)$, и тогда $\dim \mathbf{R}_3[t]$ =4. Заметим, что совокупность $e' = (1, t, t^3, t^2)$ также является базисом этого пространства, но это другой базис, т.к. эти одночлены расположены в другом порядке.

Пример 8. Множество комплексных чисел $\mathcal{X}$= **C** является вещественным линейным пространством, т.к. комплексные числа можно складывать, умножать на вещественные числа, и для этих операций выполнены 8 аксиом линейного пространства. Любое комплексное число может быть записано в алгебраической форме: $z = a + ib$, где $a, b \in \boldsymbol{R}$. Следовательно, числа 1 и i являются порождающей системой для пространства $\mathcal{X}$ **.** Из равенства $a + ib = 0$ следует: $a = b = 0$. Таким образом, совокупность чисел 1, i линейно независимая. Поэтому числа 1 и i являются базисом пространства $\mathcal{X}$ и $\dim_{\mathbf{R}}\mathcal{X}$=2. Это обозначение подчёркивает, что пространство $\mathcal{X}$ в данном примере является **вещественным** линейным пространством.

Пример 9. Множество комплексных чисел $\mathcal{X}_1$ = **C** является комплексным линейным пространством, т.к. комплексные числа можно складывать, умножать на комплексные числа, и для этих операций выполнены 8 аксиом линейного пространства. Любое комплексное число z можно записать так: $z = z \cdot 1$, где $1 \in$ **C.** Следовательно, число 1 является порождающей системой для пространства $\mathcal{X}_1$ **.** Из равенства $z \cdot 1 = 0$ следует: $z = 0$. Таким образом, совокупность, состоящая из числа 1, линейно независимая. Поэтому число 1 является базисом пространства $\mathcal{X}_1$ и $\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{X}_1$ =1. Это обозначение подчёркивает, что пространство $\mathcal{X}_1$ в данном примере является **комплексным** линейным пространством.

Задача 1. Найдите $\dim_{\mathbf{R}}\mathcal{X}$, где $\mathcal{X} = M_2(\mathbf{C})$.

Задача 2. Найдите $\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{X}_1$, где $\mathcal{X}_1 = M_2(\mathbf{C})$.

Теорема 2. Любая порождающая система векторов n-мерного линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K,** содержащая n векторов, является линейно независимой.

Доказательство. Пусть $\mathcal{X} =< \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n >$. Доказательство проведём от противного. Пусть система векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ линейно зависимая. Тогда из теоремы 4§2 следует, что один из этих векторов, например, $\vec{x}_n$ есть линейная комбинация остальных векторов, т.е. $\vec{x}_n$=ЛК$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1})$. Следовательно,

$\mathcal{X}$ = $< \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}_n >=< \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1},$ ЛК$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}) >=< \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1} >$. Здесь мы воспользовались замечанием к определению 1§2. Пусть $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ - базис $\mathcal{X}$ **.** Тогда $\vec{y}_i$=ЛК$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1})$, $i = \overline{1, n}$, т.к.

$\mathcal{X} =< \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1} >$. Следовательно, по теореме 6§2 совокупность векторов $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ линейно зависимая, что противоречит тому, что это базис $\mathcal{X}$ **.** Следовательно, наше предположение неверно, и система векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ линейно независимая.

Следствие. Любая упорядоченная порождающая система векторов n- мерного линейного пространства, содержащая n векторов, является базисом этого пространства.

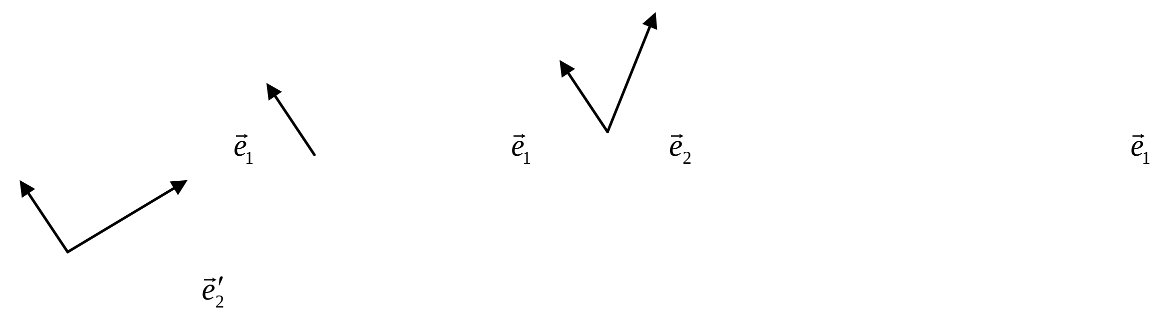
Теорема 3. Любая линейно независимая система векторов n- мерного линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K,** содержащая n векторов, является порождающей.
Доказательство. Пусть $\mathcal{X} =< \vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_n >$, где $\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_n$ - базис $\mathcal{X}$, и пусть $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n$ линейно независимая система векторов. Покажем, что любой вектор $\vec{x} \in \mathcal{X}$ есть линейная комбинация векторов
$\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n$. Каждый из векторов совокупности $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n ,\vec{x}$ есть линейная комбинация векторов базиса $\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_n$. Число векторов этой совокупности больше числа комбинируемых векторов базиса, т.к. $n+1>n$. Следовательно, эта совокупность $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n ,\vec{x}$ линейно зависимая, а тогда по теореме 5§2 вектор $\vec{x}$ есть линейная комбинация векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n$. Следовательно, $\mathcal{X} =< \vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n >$ и совокупность $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n$ - порождающая система пространства $\mathcal{X}$.

Следствие. Любая упорядоченная линейно независимая система векторов n- мерного линейного пространства, содержащая n векторов, является базисом этого пространства.

Лемма. Если число векторов линейно независимой совокупности $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$ конечномерного линейного пространства $\mathcal{X}$ меньше размерности этого пространства $m<n=\dim\mathcal{X}$, то найдётся такой вектор
$\vec{x}_{m+1} \in \mathcal{X}$, что совокупность векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m,\vec{x}_{m+1}$ линейно независимая.
Доказательство проведём от противного. Пусть для любого вектора $\vec{x} \in \mathcal{X}$ система векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m,\vec{x}$
линейно зависимая. Тогда по теореме 5§2 вектор $\vec{x} = \text{ЛК}(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m)$. Следовательно, $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$ - линейно независимая и порождающая система, т.е. базис $\mathcal{X}$, а тогда $\dim\mathcal{X} = m<n=\dim\mathcal{X}$. Получили противоречие. Следовательно, наше предположение было неверно.

Теорема 4. Любую линейно независимую систему векторов конечномерного линейного пространства можно дополнить до базиса этого пространства.
Доказательство. Пусть $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$ - линейно независимая система векторов и $\dim\mathcal{X} = n$.
Если $m=n$, то это базис по следствию к теореме 3. Если $m<n$, то по лемме найдётся такой вектор $\vec{x}_{m+1} \in \mathcal{X}$, что совокупность векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m,\vec{x}_{m+1}$ линейно независимая. Если $m+1=n$, то это базис
по следствию к теореме 3. В противном случае продолжим этот процесс. Через $n-m$ шагов построим базис $\mathcal{X}$.

Замечание. Данную линейно независимую систему векторов (случай $m < n$) можно дополнить до базиса пространства бесчисленным множеством способов. Например, на рисунке показано, что вектор $\vec{e}_1 \in V_2$
можно дополнить до базиса V_2 пространства свободных векторов на плоскости вектором $\vec{e}_2$**,** а можно и вектором $\vec{e}_2'$ и т.д.



Теорема 5. Любая порождающая система векторов конечномерного линейного пространства содержит базис этого пространства.

Доказательство. Пусть $\mathcal{X} = < \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m >$. Если $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$ - линейно независимая система векторов, то это базис $\mathcal{X}$**.** В противном случае один из этих векторов, например, $\vec{x}_m = \text{ЛК}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{m-1})$. Тогда
$\mathcal{X}$ **=** $< \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{m-1}, \vec{x}_m > = < \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{m-1},\ \text{ЛК}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{m-1}) > = < \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{m-1} >$. Здесь мы воспользовались замечанием к определению 1§2. Если $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{m-1}$ - линейно независимая система векторов, то это базис $\mathcal{X}$**.** В противном случае продолжим процесс выбрасывания «лишних» векторов, и через $m-n$ шагов получим базис $\mathcal{X}$**.**
Теорема доказана.

Лекция 14. Ортогонализация Грамма-Шмидта.

§4. Координаты вектора. Матрица перехода.

Пусть $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ - базис $\mathcal{X}$– линейного пространства над полем **K.** Из определения базиса следует, что любой вектор $\vec{x}$ этого пространства может быть представлен в виде:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n \quad , \quad x_i \in \mathbf{K}, \quad i = \overline{1,n}$$

(1)

Или, что то же самое: $\vec{x} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2 \ldots \vec{e}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = e \cdot X$, где e- базис $\mathcal{X}$**,** $X = (x_1 \ldots x_n)^T$**.**

Определение 1. Коэффициенты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в разложении (1) вектора $\vec{x}$ по базису e будем называть **координатами** вектора $\vec{x}$ относительно базиса e.

Координаты вектора $\vec{x}$ относительно базиса e будем записывать в столбик и обозначать так: $[\vec{x}]_e$.

Таким образом, $[\vec{x}]_e \overset{def}{=} (x_1 x_2 \ldots x_n)^T$, и $\vec{x} = e \cdot [\vec{x}]_e$.

Теорема 1. Координаты вектора относительно данного базиса определены однозначно.

Доказательство. Пусть $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ - базис $\mathcal{X}$ – линейного пространства над полем **K,** $\vec{x} \in \mathcal{X}$, и пусть вектор $\vec{x}$ разложен по базису e двумя способами:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n \quad , \quad x_i \in \mathbf{K}, \quad i = \overline{1,n} \qquad (1)$$

$$\vec{x} = x_1'\vec{e}_1 + x_2'\vec{e}_2 + \ldots + x_n'\vec{e}_n \quad , \quad x_i' \in \mathbf{K}, \quad i = \overline{1,n} \qquad (2)$$

Вычтем из равенства (1) равенство (2). В результате получим:

$$\vec{0} = (x_1 - x_1')\vec{e}_1 + (x_2 - x_2')\vec{e}_2 + \ldots + (x_n - x_n')\vec{e}_n .$$

Из последнего равенства следует: $x_1 - x_1' = x_2 - x_2' = \ldots = x_n - x_n' = 0$, т.к. $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ - базис $\mathcal{X}$ и потому линейно независимая система векторов. Следовательно, $x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \ldots x_n = x_n'$, и теорема доказана.

Проведём это же доказательство, используя матричную форму записи. Пусть справедливы равенства

$$\vec{x} = e \cdot X \text{, где } X = (x_1\ x_2 \ldots x_n)^T \qquad (3)$$

$$\vec{x} = e \cdot X' \text{, где } X' = (x_1'\ x_2' \ldots x_n')^T \qquad (4)$$

Вычтем из равенства (3) равенство (4). В результате получим:

$\vec{0} = eX - eX' = e(X - X')$.

Из равенства $e(X - X') = \vec{0}$ следует: $X - X' = \vec{0} \Leftrightarrow X = X'$, т.к. e - линейно независимая система векторов.

Здесь мы воспользовались дистрибутивностью и продемонстрировали насколько удобнее пользоваться матричной формой записи.

Замечание. Доказанное утверждение в матричной форме может быть сформулировано так: если для вектора $\vec{x}$ справедливо равенство $\vec{x} = e \cdot X$, где e - базис, а $X = (x_1 \ldots x_n)^T$ - столбец чисел, то $X = [\vec{x}]_e$.

Действительно, только один числовой столбец, а именно координатный столбец $[\vec{x}]_e$ может удовлетворять приведённому матричному равенству.

Пример 1. Пусть $\mathcal{X}$ **=** $\boldsymbol{R}_n$**,** $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$, где $\vec{e}_i = (0 \ldots 0\, 1\, 0 \ldots 0)$ - строка, у которой на i-ом месте

стоит единица, $\vec{x} = (1\, 2 \ldots n)$. Очевидно, справедливо равенство:

$$\vec{x} = (1\, 2 \ldots n) = 1 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + n \cdot \vec{e}_n \text{. Следовательно, } [\vec{x}]_e = (1\, 2 \ldots n)^T .$$

Теорема 2. При сложении векторов их координаты складываются. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Другими словами, если $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ - базис линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K**, то для любых векторов $\vec{x}, \vec{y}$ этого пространства и для любого числа $\lambda \in$ **K** справедливы равенства:

1) $[\vec{x} + \vec{y}]_e = [\vec{x}]_e + [\vec{y}]_e$;

2) $[\lambda \cdot \vec{x}]_e = \lambda \cdot [\vec{x}]_e$.

Доказательство. Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$, $x_i \in$ **K**, $i = \overline{1,n}$
(1)

и пусть $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n$, $y_i \in$ **K**, $i = \overline{1,n}$
(5)

1) Сложим равенства (1) и (5). В результате получим:
$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1)\vec{e}_1 + (x_2 + y_2)\vec{e}_2 + \ldots + (x_n + y_n)\vec{e}_n$. Какие аксиомы линейного пространства использованы в этой выкладке? Полученное равенство и означает, что
$[\vec{x} + \vec{y}]_e = ((x_1 + y_1) \quad (x_2 + y_2) \quad \ldots (x_n + y_n))^T = (x_1 \; x_2 \ldots x_n)^T + (y_1 \; y_2 \ldots y_n)^T = [\vec{x}]_e + [\vec{y}]_e$.
То же самое можно доказать используя матричную форму записи. Равенство (1), очевидно, эквивалентно
равенству $\vec{x} = e \cdot [\vec{x}]_e$, где $[\vec{x}]_e = (x_1 \ldots x_n)^T$ (6).
Равенство (5), очевидно, эквивалентно равенству $\vec{y} = e \cdot [\vec{y}]_e$, где $[\vec{y}]_e = (y_1 \ldots y_n)^T$ (7).
Сложим равенства (6) и (7): $\vec{x} + \vec{y} = e \cdot [\vec{x}]_e + e \cdot [\vec{y}]_e = e \cdot ([\vec{x}]_e + [\vec{y}]_e)$. Здесь мы воспользовались дистрибутивностью. Из замечания к теореме 1 получаем:
$[\vec{x} + \vec{y}]_e = [\vec{x}]_e + [\vec{y}]_e$.

2) Умножим равенство (1) на число λ. В результате получим:
$\lambda \cdot \vec{x} = (\lambda \cdot x_1)\vec{e}_1 + (\lambda \cdot x_2)\vec{e}_2 + \ldots + (\lambda \cdot x_n)\vec{e}_n$. Какие аксиомы линейного пространства использованы в этой выкладке? Полученное равенство и означает, что
$[\lambda \cdot \vec{x}]_e = ((\lambda \cdot x_1) \, (\lambda \cdot x_2) \ldots (\lambda \cdot x_n))^T =$
$= \lambda \cdot (x_1 x_2 \ldots x_n)^T = \lambda \cdot [\vec{x}]_e$. То же самое можно доказать используя матричную форму записи. Умножим равенство (6) на число λ. В результате получим:
$\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (e \cdot [\vec{x}]_e) = e \cdot (\lambda \cdot [\vec{x}]_e)$. Из замечания к теореме 1 следует, что $[\lambda \cdot \vec{x}]_e = \lambda \cdot [\vec{x}]_e$.
Теорема доказана.

Пусть $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ и $e' = (\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n)$ - базисы конечномерного линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K**. Выясним, как связаны координатные столбцы вектора $\vec{x}$ относительно этих базисов.

Разложим векторы «нового» базиса e' по «старому» базису e:

$$\begin{aligned}
\vec{e}\,'_1 &= c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + \ldots + c_{n1}\vec{e}_n \\
\vec{e}\,'_2 &= c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + \ldots + c_{n2}\vec{e}_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vec{e}\,'_n &= c_{1n}\vec{e}_1 + c_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + c_{nn}\vec{e}_n
\end{aligned} \qquad (8)$$

Равенства (8), очевидно, означают, что $[\vec{e}_1']_e = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{n1} \end{pmatrix}$; $[\vec{e}_2']_e = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{n2} \end{pmatrix}$; $[\vec{e}_n']_e = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \dots \\ c_{nn} \end{pmatrix}$.

Составим из полученных столбцов матрицу $C = \begin{pmatrix} c_{11}\ c_{12} \dots c_{1n} \\ c_{21}\ c_{22} \dots c_{2n} \\ \dots\ \dots\dots\ \dots \\ c_{n1}\ c_{n2} \dots c_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbf{K})$.

В матричной форме равенства (8) можно записать так: $e' = e \cdot C$. Действительно, $e \cdot C =$

$$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} c_{11}\ c_{12} \dots c_{1n} \\ c_{21}\ c_{22} \dots c_{2n} \\ \dots\ \dots\dots\ \dots \\ c_{n1}\ c_{n2} \dots c_{nn} \end{pmatrix} = ((c_{11} \cdot \vec{e}_1 + c_{21} \cdot \vec{e}_2 + \dots + c_{n1} \cdot \vec{e}_n) \dots (c_{1n} \cdot \vec{e}_1 + c_{2n} \cdot \vec{e}_2 + \dots + c_{nn} \cdot \vec{e}_n)) =$$

$$= (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n') = e'.$$

Определение 2. Матрицей перехода от базиса $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ конечномерного линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K** к базису $e' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n')$ того же пространства будем называть такую матрицу $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$, что для её элементов справедливы равенства (8), или, что то же самое $e' = e \cdot C$.

Последнее матричное равенство эквивалентно следующему: $C = \left([\vec{e}_1']_e\ [\vec{e}_2']_e \dots [\vec{e}_n']_e\right)$.

Обозначать матрицу перехода от базиса e к базису e' будем так: $C_{e\to e'}$.

Таким образом, из определения 2 следует, что $e' \overset{def}{=} e \cdot C_{e\to e'} \Leftrightarrow C_{e\to e'} \overset{dtf}{=} \left([\vec{e}_1']_e\ [\vec{e}_2']_e \dots [\vec{e}_n']_e\right)$.

Замечание 1. Из теоремы 1 следует, что для данных базисов e и e' матрица $C_{e\to e'}$ определена однозначно,
т.е. существует **единственная** матрица $C \in M_n(\mathbf{K})$ такая, что $e' = e \cdot C$. Таким образом, из равенства
$e' = e \cdot C$ следует, что $C = C_{e\to e'}$.

Замечание 2. Очевидно, $C_{e\to e} = E$.

Теорема 3. Для любых базисов e, e' и e'' конечномерного линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K** и для любого вектора $\vec{x}$ этого пространства справедливы равенства:

1) $[\vec{x}]_e = C_{e\to e'} \cdot [\vec{x}]_{e'}$;

2) $C_{e\to e'} \cdot C_{e'\to e''} = C_{e\to e''}$; $C_{e''\to e'} \cdot C_{e'\to e} = C_{e''\to e}$;

3) $C_{e\to e'} \cdot C_{e'\to e} = E$; $C_{e'\to e} \cdot C_{e\to e'} = E$.

Доказательство проведём используя матричную форму записи.

1) Из определения 1 получаем: $\vec{x} = e \cdot [\vec{x}]_e$ и $\vec{x} = e' \cdot [\vec{x}]_{e'}$. Из определения 2 следует, что $e' = e \cdot C_{e\to e'}$. подставим это выражение вместо базиса e' в последнее равенство: $\vec{x} = e' \cdot [\vec{x}]_{e'} = (e \cdot C_{e\to e'}) \cdot [\vec{x}]_{e'} = e \cdot (C_{e\to e'} \cdot [\vec{x}]_{e'})$. Из замечания после теоремы 1 отсюда следует, что $[\vec{x}]_e = C_{e\to e'} \cdot [\vec{x}]_{e'}$.

2) Из определения 2 следует, что $e' = e \cdot C_{e \to e'}$ и $e'' = e' \cdot C_{e' \to e''}$. Подставим в последнее равенство выражение для e' из предыдущего равенства. В результате получим: $e'' = e' \cdot C_{e' \to e''} = (e \cdot C_{e \to e'}) \cdot C_{e' \to e''} = e \cdot (C_{e \to e'} \cdot C_{e' \to e''})$.
Из замечания 1 к определению 2 следует: $C_{e \to e''} = C_{e \to e'} \cdot C_{e' \to e''}$. Второе равенство получается из полученного, если базисы e и e'' поменять местами.
3) Положим $e'' = e$. Тогда из предыдущих равенств получаем: $C_{e \to e'} \cdot C_{e' \to e} = C_{e \to e} = E$ и $C_{e' \to e} \cdot C_{e \to e'} = C_{e' \to e'} = E$.
Теорема доказана.
Замечание. Таким образом, $C_{e \to e'} = C^{-1}{}_{e' \to e}$ и $C_{e' \to e} = C^{-1}{}_{e \to e'}$.
Пример 2. Пусть $\mathcal{X} = \mathbf{R}_2[t]$- пространство многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше второй. Любой многочлен этого пространства имеет вид: $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c \cdot 1$, где $a, b, c \in$ **R.**
Следовательно, совокупность $1, t, t^2$ - порождающая для пространства $\mathcal{X}$, т.е. $\mathcal{X} = < 1, t, t^2 >$.
Из равенства $a \cdot t^2 + b \cdot t + c \cdot 1 = 0$ и определения равенства многочленов следует, что $a = b = c = 0$. Следовательно, совокупность $e = (1, t, t^2)$ является линейно независимой, т.е. базисом пространства $\mathcal{X}$ и
$\dim \mathcal{X} = 3$. Покажем, что совокупность $e' = (1, t+1, (t+1)^2)$ также является базисом пространства $\mathcal{X}$.
Из формулы Тейлора для многочленов степени не более второй следует, что любой такой многочлен можно записать следующим образом:
$f(t) = f(-1) \cdot 1 + \frac{f'(-1)}{1!}(t+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(t+1)^2$. Таким образом, совокупность
$e' = (1, t+1, (t+1)^2)$ - порождающая для пространства $\mathcal{X}$, причём $\dim \mathcal{X} = 3$.
Следовательно, по следствию к теореме 2 совокупность e' является базисом пространства $\mathcal{X}$. Подсчитаем матрицы перехода $C_{e \to e'}$ и $C_{e' \to e}$.
Очевидно, справедливы равенства:

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ t + 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ (t+1)^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot t + 1 \cdot t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_1' = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3' = 1 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \end{cases} \Leftrightarrow C_{e \to e'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицу $C_{e' \to e}$ можно найти с помощью теоремы 3, т.е. как матрицу, обратную к матрице $C_{e \to e'}$. Мы найдём эту матрицу исходя из определения.
Очевидно, справедливы равенства:

$$\begin{cases} 1 = \ \ 1 \cdot 1 + 0 \cdot (t+1) + 0 \cdot (t+1)^2 \\ t = -1 \cdot 1 + 1 \cdot (t+1) + 0 \cdot (t+1)^2 \\ t^2 = \ \ 1 \cdot 1 - 2 \cdot (t+1) + 1 \cdot (t+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = \ \ 1 \cdot \vec{e}_1' + 0 \cdot \vec{e}_2' + 0 \cdot \vec{e}_3' \\ \vec{e}_2 = -1 \cdot \vec{e}_1' + 1 \cdot \vec{e}_2' + 0 \cdot \vec{e}_3' \\ \vec{e}_3 = \ \ 1 \cdot \vec{e}_1' - 2 \cdot \vec{e}_2' + 1 \cdot \vec{e}_3' \end{cases} \Leftrightarrow C_{e' \to e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Подпространства конечномерных линейных пространств.

Определение 1. Пусть $\mathcal{X}$ - линейное пространство над полем **K.** Подмножество P векторов этого пространства будем называть **подпространством** этого пространства**,** если оно само является линейным пространством над полем **K** относительно тех операций сложения и умножения на числа поля **K,** которые имеются в $\mathcal{X}$.

Теорема 1. Критерий подпространства.
Для того чтобы подмножество P линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K** было подпространством этого пространства, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнуто относительно операций сложения и умножения на числа поля **K,** которые имеются в $\mathcal{X}$, т.е. чтобы выполнялись следующие два требования:

1) для любых векторов $\vec{x}, \vec{y}$ множества P их сумма $\vec{x}+\vec{y}$ также принадлежит множеству P;
2) для любого вектора $\vec{x}$ множества P и любого числа $\lambda \in$ **K** их произведение $\lambda \cdot \vec{x}$ также принадлежит множеству P.

Доказательство. Необходимость очевидна.
Достаточность. Выполнение требований 1) и 2) означает, что на множестве P определены операции сложения и умножения на числа поля **K,** совпадающие с соответствующими операциями на $\mathcal{X}$. Проверим выполнение 8 аксиом. Аксиомы 1,2,5-8 выполнены для всех векторов из $\mathcal{X}$, в частности, для всех векторов подмножества P.

Покажем, что выполнена и 3-я аксиома. Для этого покажем, что $\vec{0} \in P$. Из условия 2) следует, что если $\vec{x} \in P$, то и $\vec{0} = 0 \cdot \vec{x} \in P$.

Покажем, что выполнена и 4-я аксиома. Для этого покажем, что если $\vec{x} \in P$, то и $-\vec{x} \in P$. Из условия 2) следует, что если $\vec{x} \in P$, то и $-\vec{x} = (-1) \cdot \vec{x} \in P$.
Теорема доказана.

Пример 1. Подмножества $P = \{\vec{0}\}$ и $\mathcal{X}$ являются подпространствами линейного пространства $\mathcal{X}$. Эти подпространства мы будем называть тривиальными.

Замечание. По определению размерность линейного пространства, состоящего только из нулевого вектора, равна нулю, т.е. $\dim\{\vec{0}\} \overset{def}{=} 0$.

Пример 2. Пусть векторы $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m \in \mathcal{X}$ - линейному пространству полем **K.** По теореме 1 подмножество $P = <\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m>$ является подпространством линейного пространства $\mathcal{X}$, т.к. сумма двух линейных комбинаций векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$ также является линейной комбинацией этих векторов, и произведение любого числа $\lambda \in$ **K** на линейную комбинацию этих векторов также является линейной комбинацией этих векторов.

Пример 3. Пусть $\mathcal{X}$ =$\mathbf{R}_2\,[t]$- пространство многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше второй $P=$ $\mathbf{R}_1\,[t]=\{c_0+c_1t\}$. Очевидно, $P\subset\mathcal{X}$ и P является подпространством $\mathcal{X}$. Например, потому, что $P=<1,t>$.
Пример 4. Пусть $\mathcal{X}$ = $\mathbf{R}^n$ **;** $A\in M_{mn}(\mathbf{R})$. Обозначим через P множество решений системы линейных однородных алгебраических уравнений $AX=0$, т.е. $P=\{Y,\quad Y\in \mathcal{X}\ :\ AY=0\}$. Подмножество P является подпространством линейного пространства $\mathcal{X}$. Это следует из леммы §1главы IY, т.к. по этой лемме линейная комбинация решений системы линейных однородных алгебраических уравнений также является решением этой системы.

Пример 5. Пусть $\mathcal{X}$ - линейное пространство над полем **K,** $e=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n)$ - базис этого пространства,
$A\in M_{mn}(\mathbf{R})$. Обозначим через P множество всех векторов этого пространства, координатные столбцы которых относительно базиса e являются решениями системы линейных однородных алгебраических уравнений $AX=0$, т.е. $P=\{\vec{x},\quad \vec{x}\in \mathcal{X}\ :\ A[\vec{x}]_e=0\}$. Подмножество P является подпространством линейного пространства $\mathcal{X}$. Докажите это утверждение. В этом случае говорят, что система линейных однородных алгебраических уравнений $AX=0$ задает подпространство P (в базисе e).

Замечание. Подпространства линейного пространства можно задавать разными способами, используя особенности этих пространств. Примеры 2 и 5 дают два универсальных способа задания подпространства в любом линейном пространстве.

Теорема 2. Размерность любого подпространства конечномерного линейного пространства не превосходит размерности этого пространства, т.е. если P является подпространством линейного пространства $\mathcal{X}$, то
$\dim P\le\dim\mathcal{X}$.
Доказательство. Пусть $e=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n)$ - базис $\mathcal{X}$, т.е. $\dim\mathcal{X}=n$; $y=(\vec{y}_1,\vec{y}_2,\ldots,\vec{y}_k)$ - базис P, т.е.
$\dim P=k$. Пусть $k>n$. Любой вектор $\vec{y}_i$ может быть разложен по базису e, т.к. e - базис $\mathcal{X}$. Следовательно, $\vec{y}_i$=ЛК$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n)$, $1\le i\le k$, причём число k линейных комбинаций больше числа n комбинируемых векторов. Следовательно, совокупность $\vec{y}_1,\vec{y}_2,\ldots,\vec{y}_k$ линейно зависимая по теореме 6 §2, что противоречит тому, что это базис P. Таким образом, $k=\dim P\le\dim\mathcal{X}=n$**,** и теорема доказана**.**

Теорема 3. Если размерность подпространства P конечномерного линейного пространства $\mathcal{X}$ равна размерности этого пространства, то они равны, т.е. $P=\mathcal{X}$ **.**
Доказательство. Пусть $e=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n)$ - базис P, т.е. $P=<\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n>$ и пусть $\dim\mathcal{X}$ $=n$**.**

Тогда по следствию к теореме 3§3 $e=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ - базис $\mathcal{X}$. Следовательно, $P=<\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n>=\mathcal{X}$.

Теорема 4. Базис любого подпространства P конечномерного линейного пространства $\mathcal{X}$ можно дополнить до базиса этого пространства.

Доказательство. Пусть $v=(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p)$ - базис подпространства P линейного пространства $\mathcal{X}$. По теореме 4§2 базис v можно дополнить до базиса пространства $\mathcal{X}$, т.к. v - линейно независимая совокупность. Теорема доказана.

Если $\dim\mathcal{X}>1$, то пространство $\mathcal{X}$ содержит бесчисленное множество различных подпространств, из которых можно конструировать новые подпространства. Приведём две такие конструкции.

Определение 2. Суммой подпространств P и Q линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K**
будем называть совокупность всех векторов вида $\vec{p}+\vec{q}$, где $\vec{p}\in P, \vec{q}\in Q$.
Обозначать сумму подпространств P и Q будем так: $P+Q$.

Таким образом, $P+Q\overset{def}{=}\{\vec{x},\, \vec{x}\in\mathcal{X}:\vec{x}=\vec{p}+\vec{q};\ \vec{p}\in P, \vec{q}\in Q\}$.

Аналогичным образом определяется сумма **конечного числа** подпространств $P_1,P_2,\dots,P_m$ линейного пространства $\mathcal{X}$. Сумму подпространств $P_1,P_2,\dots,P_m$ будем обозначать так:

$$P_1+P_2+\ldots+P_m \quad \text{или так: } \sum_{i=1}^{m}P_i .$$

По определению: $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}P_i\overset{def}{=}\{\vec{x},\, \vec{x}\in\mathcal{X}:\vec{x}=\sum_{i=1}^{m}\vec{p}_i,\ \vec{p}_i\in P_i,\quad i=\overline{1,m}\}$.

Определение 3. Пересечением подпространств P и Q линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K**
будем называть совокупность всех векторов этого пространства, принадлежащих как подпространству P, так и подпространству Q. Обозначать пересечение подпространств P и Q будем так: $P\cap Q$.

Таким образом, $P\cap Q\overset{def}{=}\{\vec{x},\, \vec{x}\in\mathcal{X}:\ \vec{x}\in P; \vec{x}\in Q\}$.

Аналогичным образом определяется пересечение **любого** множества подпространств P_i, где индекс i пробегает множество индексов I (конечное или бесконечное). Пересечение подпространств P_i, где $i\in I$, будем обозначать так: $\bigcap_{i\in I}P_i$.

По определению: $\displaystyle\bigcap_{i\in I}P_i\overset{def}{=}\{\vec{x},\, \vec{x}\in\mathcal{X}:\ \vec{x}\in P_i,\quad \forall i\in I\}$.

Теорема 5. Сумма **конечного** числа подпространств линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K** является подпространством этого пространства.

Пересечение **любого множества** подпространств линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K** является подпространством этого пространства.

Доказательство.

I. Пусть $P_1, P_2, \dots, P_m$ - подпространства линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K.** Покажем, что

множество $P = \sum\limits_{i=1}^{m} P_i$ замкнуто относительно операций сложения и умножения на числа поля **K,** которые

имеются в $\mathcal{X}$, т.е. покажем, что для множества P выполняются условия 1) и 2) теоремы 1.

1) Пусть векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in P$. Из определения 2 следует, что для этих векторов справедливы

равенства: $\vec{x}_1 = \sum\limits_{i=1}^{m} \vec{p}_i', \quad \vec{x}_2 = \sum\limits_{i=1}^{m} \vec{p}_i''$, где $\vec{p}_i', \vec{p}_i'' \in P_i$ для $i = \overline{1, m}$. Подпространства P_i

замкнуты относительно операции сложения, т.е. из включений $\vec{p}_i', \vec{p}_i'' \in P_i$ следует, что $\vec{p}_i' + \vec{p}_i'' \in P_i$

для всех $i = \overline{1, m}$. Отсюда следует, что $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \sum\limits_{i=1}^{m} \vec{p}_i' + \sum\limits_{i=1}^{m} \vec{p}_i'' = \sum\limits_{i=1}^{m} (\vec{p}_i' + \vec{p}_i'') \in P$.

2) Пусть число $\lambda \in$ **K,** $\vec{x}_1 = \sum\limits_{i=1}^{m} \vec{p}_i' \in P$, где $\vec{p}_i' \in P_i$ для $i = \overline{1, m}$. Отсюда следует,

что $\lambda \cdot \vec{x}_1 = \sum\limits_{i=1}^{m} (\lambda \cdot \vec{p}_i') \in P$, т.к. P_i - подпространства $\mathcal{X}$ и потому замкнуты относительно операции

умножения на числа поля **K** , т.е. из включения $\vec{p}_i' \in P_i$ следует, что $\lambda \cdot \vec{p}_i' \in P_i$ для всех $i = \overline{1, m}$.

II**.** Пусть Q_i - подпространства линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K** для всех $i \in I$. Покажем, что

множество $Q = \bigcap\limits_{i \in I} Q_i$ замкнуто относительно операций сложения и умножения на числа поля **K,** которые

имеются в $\mathcal{X}$, т.е. покажем, что для множества Q выполняются условия 1) и 2) теоремы 1.

1) Пусть векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in Q$. Из определения 3 следует, что для этих векторов справедливы включения: $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in Q_i$ для всех $i \in I$. Подпространства Q_i - замкнуты относительно операции сложения. Поэтому из включений $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in Q_i$ следует, что $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in Q_i$ для всех $i \in I$.

2) Пусть число $\lambda \in$ **K,** $\vec{x}_1 \in Q$ Из определения 3 следует, что для этого вектора справедливо включение

$\vec{x}_1 \in Q_i$ для всех $i \in I$. Подпространства Q_i - замкнуты относительно операции умножения на числа поля $\mathbf{K}$, т.е. из включения $\vec{x}_1 \in Q_i$ следует, что $\lambda \cdot \vec{x}_1 \in Q_i$ для всех $i \in I$.
Теорема доказана.

Теорема 6. (Теорема Грассмана.)
Для любых подпространств P и Q конечномерного линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем $\mathbf{K}$ справедливо равенство $\dim P + \dim Q = \dim(P+Q) + \dim(P \cap Q)$.
Доказательство. Введём обозначения:
$p = \dim P; \quad q = d\,\mathrm{im}\, Q, \quad s = \dim(P+Q), \quad t = \dim(P \cap Q)$.
Мы хотим доказать, что $p + q = s + t$. Выберем базис подпространства $P \cap Q$: $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_t$.
По теореме 4этот базис можно дополнить до базиса подпространства P и до базиса подпространства Q, т.к. $P \cap Q$ является подпространством и P, и Q.
Пусть $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_t, \vec{u}_{t+1}, \ldots, \vec{u}_p$ - базис P (1),
$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_t, \vec{v}_{t+1}, \ldots, \vec{v}_q$ - базис Q (2).
I. Докажем, что совокупность векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_t, \vec{u}_{t+1}, \ldots, \vec{u}_p, \vec{v}_{t+1}, \ldots, \vec{v}_q$ - базис $P+Q$ (3).
Тогда отсюда следует, что $s = p + q - t \Leftrightarrow p + q = s + t$.
Сначала докажем, что система (3) линейно независима. Для этого составим линейную комбинацию этих векторов и приравняем её к нулевому вектору:

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \ldots + \alpha_t\vec{u}_t + \alpha_{t+1}\vec{u}_{t+1} + \ldots + \alpha_p\vec{u}_p + \beta_{t+1}\vec{v}_{t+1} + \ldots + \beta_q\vec{v}_q = \vec{0} \qquad (4)$$

Первые p слагаемых перенесём направо. В результате получим:
$\beta_{t+1}\vec{v}_{t+1} + \ldots + \beta_q\vec{v}_q = -\alpha_1\vec{u}_1 - \ldots - \alpha_p\vec{u}_p \in P \cap Q$, т.к. вектор в левой части равенства из подпространства Q, а вектор в правой части равенства из подпространства P.
Следовательно, этот вектор можно разложить по базису $P \cap Q$. Таким образом, получаем:

$\beta_{t+1}\vec{v}_{t+1} + \ldots + \beta_q\vec{v}_q = -\beta_1\vec{u}_1 - \ldots - \beta_t\vec{u}_t$, откуда следует равенство:

$\beta_1\vec{u}_1 + \ldots + \beta_t\vec{u}_t + \beta_{t+1}\vec{v}_{t+1} + \ldots + \beta_q\vec{v}_q = \vec{0}$. Следовательно, $\beta_1 = \ldots = \beta_t = \beta_{t+1} = \ldots = \beta_q = 0$, т.к. совокупность векторов (2) линейно независимая как базис Q.

Тогда из равенства (4) следуют равенства $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$, т.к. совокупность векторов (1) линейно независимая как базис P.

Таким образом, из равенства (4) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = \beta_{t+1} = \ldots = \beta_q = 0$, т.е. совокупность векторов (3) линейно независимая по определению 4§2 .
II. Теперь докажем, что совокупность (3) является порождающей подпространства $P+Q$. По определению 2 любой вектор $\vec{z} \in P+Q$ может быть записан в виде $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$, где $\vec{x} \in P, \vec{y} \in Q$. Векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ можно разложить по базисам (1)и (2) подпространств P и Q соответственно:

$\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i\vec{u}_i$, где $x_i \in \mathbf{K}$ для $i = \overline{1,p}$; $\quad \vec{y} = \sum\limits_{j=1}^{t} y_j\vec{u}_j + \sum\limits_{j=t+1}^{q} y_j\vec{v}_j$, где $y_j \in \mathbf{K}$ для $j = \overline{1,q}$.

Таким образом, любой вектор $\vec{z} \in P+Q$ может быть записан так:
$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^{p} x_i \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{t} y_i \vec{u}_i + \sum_{j=t+1}^{q} y_j \vec{v}_j = \sum_{i=1}^{t} (x_i + y_i)\vec{u}_i + \sum_{i=t+1}^{p} x_i \vec{u}_i + \sum_{j=t+1}^{q} y_j \vec{v}_j$, т.е. совокупность (3) является порождающей подпространства $P+Q$.

Итак, совокупность (3) линейно независимая и порождающая для подпространства $P+Q$. Следовательно, по определению 3§3 это базис подпространства $P+Q$, и теорема 6 доказана.

§6. Прямая сумма подпространств.

Определение 1. Сумму двух подпространств P и Q линейного пространства $\mathcal{X}$ будем называть **прямой**, если для любого вектора $\vec{z} \in P+Q$ его представление в виде $\vec{z} = \vec{p} + \vec{q}$, где $\vec{p} \in P, \vec{q} \in Q$, **однозначно**.
Обозначать прямую сумму подпространств P и Q будем так: $P \oplus Q$.

Аналогично определяется **прямая сумма конечного числа** подпространств $P_1, P_2, \ldots, P_m$ линейного пространства $\mathcal{X}$. Сумму подпространств $\sum_{i=1}^{m} P_i$ будем называть **прямой**, если для любого вектора $\vec{z} \in \sum_{i=1}^{m} P_i$ его представление в виде $\vec{z} = \sum_{i=1}^{m} \vec{p}_i,\ \vec{p}_i \in P_i,\quad i = \overline{1,m}$, **однозначно**.
Прямую сумму подпространств $P_1, P_2, \ldots, P_m$ будем обозначать так: $P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_m$ или так: $\mathop{\oplus}\limits_{i=1}^{m} P_i$.

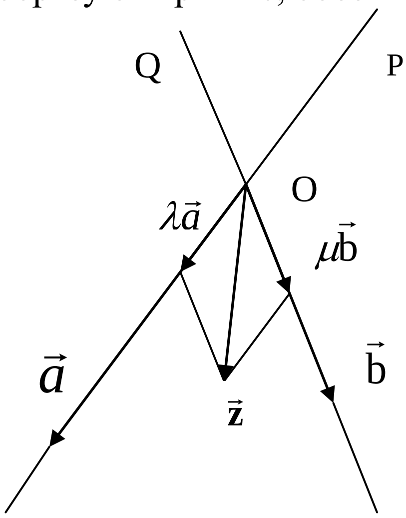
Определение 2. Если $\mathcal{X} = P \oplus Q$, то говорят, что пространство $\mathcal{X}$ раскладывается в прямую сумму подпространств P и Q. В этом случае подпространство Q называют **прямым дополнением** подпространства P до пространства $\mathcal{X}$.

Разумеется, в этом случае подпространство P является прямым дополнением подпространства Q до пространства $\mathcal{X}$.

Определение 3. Пусть пространство $\mathcal{X}$ раскладывается в прямую сумму подпространств P и Q, т.е.
$\mathcal{X} = P \oplus Q$. Тогда любой вектор $\vec{z} \in \mathcal{X}$ может быть единственным образом представлен в виде:
$\vec{z} = \vec{p} + \vec{q}$, где $\vec{p} \in P, \vec{q} \in Q$. В этом случае вектор $\vec{p}$ называют **проекцией вектора** $\vec{z}$ **на подпространство** P **параллельно подпространству** Q и обозначают так:
$\vec{p} = pr_{P\parallel Q}\vec{z}$.

Пример 1. Пусть $\mathcal{X}$ - пространство свободных векторов на плоскости, т.е. $\mathcal{X} = \mathcal{V}_2$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - два неколлинеарные вектора этого пространства. Тогда $(\vec{a},\vec{b})$ - базис $\mathcal{X}$.
Пусть $P =< \vec{a} >, Q =< \vec{b} >$.
Любой вектор $\vec{z} \in \mathcal{V}_2$ может быть единственным образом разложен по этому базису: $\vec{z} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, где
$\lambda\vec{a} \in P, \mu\vec{b} \in Q$. Следовательно, $\mathcal{X} = P \oplus Q$, подпространство Q является прямым дополнением подпространства P до пространства $\mathcal{X}$, $\lambda\vec{a} = pr_{P\parallel Q}\vec{z}$.

Приведённый ниже рисунок служит иллюстрацией к примеру 1. На этом рисунке все векторы, принадлежащие пространству $\mathcal{V}_2$, имеют начало в точке O. Концы векторов, принадлежащих подпространствам P и Q соответственно, образуют прямые, обозначенные на рисунке теми же буквами.



Пример 2. Пусть $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ - базис конечномерного линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K**.
Обозначим через P_i линейную оболочку, натянутую на вектор $\vec{e}_i$, т.е. $P_i =< \vec{e}_i >$.
Любой вектор $\vec{z} \in \mathcal{X}$ может быть единственным образом разложен по этому базису: $\vec{z} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i$, где $\lambda_i \vec{e}_i \in P_i$, $i = \overline{1,n}$.

Следовательно, $\mathcal{X} = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$.

Задача 1. Пусть $\mathcal{X} = M_n$ (**K**). Обозначим через P и Q множество всех симметричных и антисимметричных матриц пространства $\mathcal{X}$ соответственно, т.е. $P = \{A, A \in \mathcal{X} : A = A^T\}$; $Q = \{A, A \in \mathcal{X} : A = -A^T\}$.
Докажите, что P и Q - подпространства $\mathcal{X}$, $\mathcal{X} = P \oplus Q$. Для произвольной матрицы $A \in \mathcal{X}$ найдите
$pr_{P\parallel Q} A$.

Задача 2. Докажите, что для двух подпространств P и Q - конечномерного линейного пространства $\mathcal{X}$ одинаковой размерности существует общее прямое дополнение. Другими словами: если $\dim P = \dim Q$, то существует подпространство L линейного пространства $\mathcal{X}$ такое, что справедливы равенства $\mathcal{X} = P \oplus L$ и $\mathcal{X} = Q \oplus L$.

Теорема 1. Критерий прямой суммы двух подпространств.
Для того чтобы сумма подпространств P и Q линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K** была прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий.

I. Из равенства $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$, где $\vec{x} \in P, \vec{y} \in Q$ следует, что $\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$.

II. $P \cap Q = \{\vec{0}\}$

III. $\dim(P+Q) = \dim P + \dim Q$.

IY. Базис суммы $P+Q$ есть объединение базисов подпространств P и Q.

.

Доказательство. I.Необходимость. Пусть сумма $P+Q$ прямая и пусть $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$, где $\vec{x} \in P, \vec{y} \in Q$. Очевидно, справедливо равенство $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, причём $\vec{0} \in P, \vec{0} \in Q$. Представление любого вектора прямой суммы в виде суммы двух слагаемых, одно из которых из подпространства P, а другое – из подпространства Q, однозначно. Следовательно, $\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$.
Достаточность. Пусть выполнено условие I. Докажем, что в этом случае сумма $P+Q$ прямая. Пусть $\vec{z} \in P+Q$ и для этого вектора справедливы равенства: $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ и $\vec{z} = \vec{x}_1 + \vec{y}_1$, где $\vec{x}, \vec{x}_1 \in P$, $\vec{y}, \vec{y}_1 \in Q$. Вычтем из первого равенства второе. В результате получим:
$\vec{0} = (\vec{x} - \vec{x}_1) + (\vec{y} - \vec{y}_1)$, где $\vec{x} - \vec{x}_1 \in P, \vec{y} - \vec{y}_1 \in Q$, потому что P и Q замкнуты относительно операций сложения и умножения на числа поля **K.** Следовательно, по условию $\vec{x} - \vec{x}_1 = \vec{0}, \quad \vec{y} - \vec{y}_1 = \vec{0}$ и $\vec{x} = \vec{x}_1, \quad \vec{y} = \vec{y}_1$. Таким образом, для любого вектора $\vec{z} \in P+Q$ его представление в виде $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$, где $\vec{x} \in P, \vec{y} \in Q$, однозначно. Следовательно, сумма подпространств P и Q прямая.

II.Необходимость. Пусть сумма $P+Q$ прямая и $\vec{z} \in P \cap Q$. Очевидно, справедливо равенство $\vec{z} + (-\vec{z}) = \vec{0}$, причём $\vec{z} \in P, -\vec{z} \in Q$.
По первому критерию прямой суммы отсюда следует, что $\vec{z} = \vec{0}$.
Достаточность. Пусть $P \cap Q = \{\vec{0}\}$. Докажем, что выполнены условия предыдущего критерия. Пусть $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$, где $\vec{x} \in P, \vec{y} \in Q$. Тогда $\vec{x} = -\vec{y}$, причём $\vec{x} \in P, -\vec{y} \in Q$. Следовательно, $\vec{x} = -\vec{y} \in P \cap Q = \{\vec{0}\}$, т.е. $\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$, и по предыдущему критерию сумма $P+Q$ прямая.
III. Необходимость. Пусть сумма $P+Q$ прямая. Тогда по второму критерию $P \cap Q = \{\vec{0}\}$. Следовательно, по теореме 6§5

$\dim(P+Q)=\dim P+\dim Q-\dim(P\cap Q)=\dim P+\dim Q-0=\dim P+\dim Q$, т.к. $\dim(P\cap Q)=\dim\{\vec{0}\}=0$.

Достаточность. Пусть $\dim(P+Q)=\dim P+\dim Q$. Тогда из той же теоремы 6§5 следует, что $\dim(P\cap Q)=0$. Следовательно,
$P\cap Q=\{\vec{0}\}$, и по второму критерию сумма $P+Q$ прямая.

IY. Необходимость. Пусть сумма $P+Q$ прямая. Из предыдущего критерия следует, что $\dim(P+Q)=\dim P+\dim Q$. Пусть $u=(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p)$ - базис подпространства P, $v=(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q)$ - базис Q. Покажем, что совокупность $u\cup v=(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p,\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q)$ - базис $P+Q$. Сначала покажем, что $u\cup v$ - порождающая для суммы $P+Q$. Действительно, любой вектор $\vec{z}\in P+Q$ имеет вид
$\vec{z}=\vec{x}+\vec{y}$, где $\vec{x}\in P,\ \vec{y}\in Q$. Векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ можно разложить по базисам u и v подпространств P и Q соответственно:
$\vec{x}=\sum_{i=1}^{p}x_i\vec{u}_i,\quad \vec{y}=\sum_{j=1}^{q}y_j\vec{v}_j$. Следовательно, $\vec{z}=\vec{x}+\vec{y}=\sum_{i=1}^{p}x_i\vec{u}_i+\sum_{j=1}^{q}y_j\vec{v}_j$. Таким образом, совокупность $u\cup v=(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p,\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q)$ - порождающая для подпространства $P+Q$, причём количество векторов в этой порождающей равно размерности $P+Q$. По следствию к теореме 2§3 это базис $P+Q$.

Достаточность. Пусть совокупность $u\cup v=(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p,\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q)$ - базис $P+Q$, где $u=(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p)$ - базис подпространства P, $v=(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q)$ - базис Q. Тогда $\dim(P+Q)=p+q$ и, следовательно, $\dim(P+Q)=\dim P+\dim Q$, потому что $\dim P=p,\ \dim Q=q$. Теорема доказана.

Приведём формулировку теоремы, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 2. Критерий прямой суммы конечного числа подпространств.
Для того чтобы сумма подпространств $P_1,P_2,\ldots,P_m$ линейного пространства $\mathcal{X}$ над полем **K** была прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий.

I. Из равенства $\sum_{i=1}^{m}\vec{p}_i=\vec{0}$, где $\vec{p}_i\in P_i$ для $i=\overline{1,m}$ следует, что $\vec{p}_i=\vec{0}$ для $i=\overline{1,m}$.

II. $P_i\cap\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}P_j=\{\vec{0}\}$

III. $\dim\sum_{i=1}^{m}P_i=\sum_{i=1}^{m}\dim P_i$.

IY. Базис суммы $\sum_{i=1}^{m}P_i$ есть объединение базисов подпространств P_i для $i=\overline{1,m}$.

Доказательства первых двух утверждений совершенно аналогичны доказательствам утверждений I и II в теореме 1. Доказательство двух других нужно провести в следующем порядке. Сначала докажите методом математической индукции по числу подпространств необходимость утверждения III. Предварительно докажите, что если сумма $\sum_{i=1}^{m} P_i$ прямая, то и сумма $\sum_{i=1}^{m-1} P_i$, а также сумма подпространств $\sum_{i=1}^{m-1} P_i$ и P_m прямые. Затем докажите необходимость утверждения IY, используя необходимость утверждения III.
Далее докажите достаточность утверждения IY и, наконец, достаточность утверждения III. Конечно, можно доказывать и по-другому.