

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

Е.А. Благовещенская

Конспект лекций
по дисциплине
«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.13)

для специальности
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации
*«Безопасность автоматизированных систем на железнодорожном
транспорте»*

Форма обучения – очная

РАЗДЕЛ 6. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Санкт-Петербург

Лекция 13.

Свойства линейных пространств. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского.

Из курса векторной алгебры известно, что свободные векторы на плоскости (и в пространстве) можно складывать и умножать на вещественные числа, причём эти операции обладают определёнными свойствами.

Многочлены с вещественными (комплексными) коэффициентами также можно складывать и умножать на вещественные (комплексные) числа, причём и эти операции обладают аналогичными свойствами.

В этой главе мы будем изучать множества элементов произвольной природы, для которых определены операции сложения и умножения на числа, причём эти операции обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над свободными векторами.

Такие множества обладают рядом общих свойств и называются линейными пространствами.

Понятие линейного пространства.

1. Определение поля.

Поле будем называть множество \mathbf{K} элементов произвольной природы, для которого выполнены следующие три требования:

I. На множестве \mathbf{K} определена операция сложения, т.е. имеется правило, с помощью которого любой упорядоченной паре (α, β) элементов этого множества ставится в соответствие **единственный** элемент γ этого множества, называемый их суммой, который будем обозначать так: $\gamma = \alpha + \beta$.

II. На множестве \mathbf{K} определена операция умножения, т.е. имеется правило, с помощью которого любой упорядоченной паре (λ, μ) элементов этого множества ставится в соответствие **единственный** элемент ω этого множества, называемый их произведением, который будем обозначать так: $\omega = \lambda \cdot \mu$.

III. Эти операции подчиняются следующим 9 аксиомам:

1. Коммутативность сложения. Для любых элементов $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ справедливо равенство:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

2. Ассоциативность сложения. Для любых элементов $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ справедливо равенство:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

3. Существование нулевого элемента. Среди элементов множества \mathbf{K} существует элемент, обозначаемый так: 0 и называемый нулевым, такой, что для любого элемента $\alpha \in \mathbf{K}$ справедливо равенство:

$$\alpha + 0 = \alpha$$

4. Существование противоположного элемента. Для любого элемента $\alpha \in \mathbf{K}$ существует элемент множества \mathbf{K} , обозначаемый так: $-\alpha$ и называемый противоположным к α , и такой, что справедливо равенство:

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

5. Коммутативность умножения. Для любых элементов $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ справедливо равенство:

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

6. Ассоциативность умножения. Для любых элементов $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ справедливо равенство:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

7. Дистрибутивность. Для любых элементов $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ справедливо равенство:

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$$

8. Существование единицы. Среди элементов множества \mathbf{K} существует элемент, обозначаемый так: 1 и называемый единицей, такой, что для любого элемента $\alpha \in \mathbf{K}$ справедливо равенство:

$$\alpha \cdot 1 = \alpha$$

9. Существование обратного элемента. Для любого элемента $\alpha \in \mathbf{K}$, не равного нулевому, существует элемент, обозначаемый так: α^{-1} и называемый обратным к α , и такой, что справедливо равенство:

$$\alpha \cdot (\alpha^{-1}) = 1$$

Замечание 1. Элементы поля в дальнейшем будем называть числами.

Пример 1. Множество вещественных чисел \mathbf{R} , очевидно, является полем.

Пример 2. Множество комплексных чисел \mathbf{C} , очевидно, является полем.

Пример 3. Множество рациональных чисел \mathbf{Q} , очевидно, является полем.

Напомним, что рациональное число - это такое, которое можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где m и n - целые числа.

Пример 4. Множество $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbf{Q}\}$ также является полем. Докажите это утверждение.

Пример 5. Множество \mathbf{Z} , состоящее из всех целых чисел, не является полем, т.к. не выполняется аксиома 9.

Например, для числа 2 нет обратного, т.е. такого **целого** числа α , чтобы выполнялось равенство $2 \cdot \alpha = 1$.

Пример 6. Множество \mathbf{K}_1 всех квадратных матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbf{R}$

является полем.

На этом множестве определены операции сложения и умножения. Очевидно,

нулевым элементом является нулевая матрица $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, которая принадлежит \mathbf{K}_1 .

Единичная матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, которая также принадлежит \mathbf{K}_1 , исполняет

роль единицы. Действительно, ранее было доказано, что для любой квадратной матрицы A второго порядка справедливы равенства $A + O = A$ и $A \cdot E = A$. В частности, эти равенства выполняются и для матриц из множества \mathbf{K}_1 . Кроме

того, для любой матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ противоположной служит матрица

$-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \in \mathbf{K}_1$. Следовательно, аксиома 4 также выполнена. Остальные

аксиомы, за исключением 5-ой, и 9-ой выполняются для всех квадратных матриц

второго порядка, в частности, эти аксиомы выполняются и для матриц из множества \mathbf{K}_1 .

Покажем, что на множестве \mathbf{K}_1 умножение коммутативно. Вычислим

$$A \cdot A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a_1 - b \cdot b_1 & a \cdot b_1 + b \cdot a_1 \\ -b \cdot a_1 - a \cdot b_1 & -b \cdot b_1 + a \cdot a_1 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$A_1 \cdot A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a - b_1 \cdot b & a_1 \cdot b + b_1 \cdot a \\ -b_1 \cdot a - a_1 \cdot b & -b \cdot b_1 + a \cdot a_1 \end{pmatrix} = A \cdot A_1 \text{ для}$$

любых матриц $A, A_1 \in \mathbf{K}_1$.

Покажем, что для любой ненулевой матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{K}_1$ существует обратная матрица, принадлежащая \mathbf{K}_1 . Действительно, матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{K}_1. \text{ Таким образом, множество } \mathbf{K}_1 \text{ относительно обычных}$$

операций сложения и умножения матриц является полем.

Пример 7. Пусть множество \mathbf{Z}_2 состоит из двух элементов, которые будем обозначать так: 1 и 0.

Операцию сложения на этом множестве зададим так:

$$0+0=0; \quad 0+1=1; \quad 1+0=1; \quad 1+1=0.$$

Операцию умножения на этом множестве зададим так:

$$0 \cdot 0 = 0; \quad 0 \cdot 1 = 0; \quad 1 \cdot 0 = 0; \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Легко проверить, что множество \mathbf{Z}_2 является полем, которое называют полем из двух элементов. Заметим, что существуют и другие поля, содержащие конечное число элементов.

Замечание 2. Для матриц одинакового строения с элементами из поля \mathbf{K} определена операция сложения (см. глава III §2).

Замечание 3. Для матриц с элементами из поля \mathbf{K} определена операция умножения на числа, т.е. элементы поля \mathbf{K} . Для этих операций сложения матриц и умножения их на числа поля \mathbf{K} справедливы 8 свойств (см. глава III §2).

Замечание 4. Для матриц с элементами из поля \mathbf{K} согласованного строения определена операция умножения, причём эта операция удовлетворяет 6 свойствам (см. глава III §3).

Справедливость этих утверждений предлагается проверить самостоятельно в качестве упражнения. В дальнейшем мы будем пользоваться этими утверждениями.

2. Определение линейного пространства.

Множество \mathcal{X} элементов произвольной природы будем называть **линейным пространством над полем**

K, если для него выполнены следующие три требования:

I. На множестве \mathcal{X} определена операция сложения, т.е. имеется правило, с помощью которого любой упорядоченной паре (\bar{x}, \bar{y}) элементов этого множества ставится в соответствие **единственный** элемент \bar{z} этого множества, называемый их суммой, который будем обозначать так: $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$.

II. На множестве \mathcal{X} определена операция умножения на числа, т.е. на элементы поля **K**. Это означает, что имеется правило, с помощью которого любому числу $\lambda \in \mathbf{K}$ и любому элементу $\bar{x} \in \mathcal{X}$ ставится в соответствие **единственный** элемент \bar{v} множества \mathcal{X} , называемый их произведением, который будем обозначать так: $\bar{v} = \lambda \cdot \bar{x}$ или так: $\bar{v} = \bar{x} \cdot \lambda$.

III. Эти операции подчиняются следующим 8 аксиомам:

1. Коммутативность сложения. Для любых элементов $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$, справедливо равенство:

$$\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$$

2. Ассоциативность сложения. Для любых элементов $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathcal{X}$, справедливо равенство:

$$(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$$

3. Существование нулевого элемента. Среди элементов множества \mathcal{X} существует элемент, обозначаемый так: $\bar{0}$ и называемый нулевым, такой, что для любого элемента $\bar{x} \in \mathcal{X}$, справедливо равенство:

$$\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$$

4. Существование противоположного элемента. Для любого элемента $\bar{x} \in \mathcal{X}$, существует элемент множества \mathcal{X} , обозначаемый так: \bar{x}' и называемый противоположным к \bar{x} , и такой, что справедливо равенство:

$$\bar{x} + \bar{x}' = \bar{0}$$

5. Для любого элемента $\bar{x} \in \mathcal{X}$, справедливо равенство:

$$1 \cdot \bar{x} = \bar{x}, \text{ где } 1 - \text{единица поля } \mathbf{K}.$$

6. Дистрибутивность относительно сложения векторов. Для любых элементов $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$, и для любого числа $\alpha \in \mathbf{K}$ справедливо равенство:

$$\alpha \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \cdot \bar{x} + \alpha \cdot \bar{y}$$

7. Дистрибутивность относительно сложения чисел. Для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ и для любого элемента $\bar{x} \in \mathcal{X}$ справедливо равенство:

$$(\alpha + \beta) \cdot \bar{x} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{x}$$

8. Для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ и для любого элемента $\bar{x} \in \mathcal{X}$ справедливо равенство:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \bar{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{x})$$

Замечание 1. Линейное пространство над полем **K** называют также векторным пространством над полем **K**.

Если по смыслу ясно, о каком поле идёт речь, или неважно каково поле **K**, то иногда \mathcal{X} будем называть просто линейным пространством.

Замечание 2. Элементы линейного пространства будем, как правило, обозначать маленькими буквами латинского алфавита, снабжёнными сверху стрелкой, и называть векторами. Элементы поля \mathbf{K} , т.е. числа, будем обозначать греческими буквами. Разумеется, будут и отступления от этих договорённостей.

Пример 1. Из курса векторной алгебры известно, что множества V_2 и V_3 свободных векторов на плоскости и в пространстве соответственно, являются линейными пространствами над полем вещественных чисел относительно имеющих там операций сложения и умножения на вещественное число.

Пример 2. Из свойств действий над матрицами следует, что $\mathcal{X} = M_{mn}(\mathbf{K})$ является линейным пространством над полем \mathbf{K} относительно имеющих там операций сложения и умножения на числа поля \mathbf{K} . В частности, множества \mathbf{K}^n , \mathbf{K}_n , $M_n(\mathbf{K})$ являются линейными пространствами над полем \mathbf{K} относительно имеющих там операций сложения и умножения на числа поля \mathbf{K} .

Пример 3. Множество $\mathcal{X} = \mathbf{R}[t]$ всех многочленов от буквы t с вещественными коэффициентами является вещественным линейным пространством (или линейным пространством над полем \mathbf{R}).

Пример 4. Множество $\mathcal{X} = C([a, b])$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций является вещественным линейным пространством, если сложение и умножение на вещественные числа определить так:

$$(f + g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x) \text{ для любого } x \in [a, b];$$

$$(\lambda \cdot f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \cdot f(x) \text{ для любого } x \in [a, b] \text{ и любого } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Пример 5. Множество $\mathcal{X} = \mathbf{R}_n[t]$ всех многочленов от буквы t с вещественными коэффициентами степени не превосходящей n , является вещественным линейным пространством (или линейным пространством над полем \mathbf{R}).

Замечание 3. Определение умножения матриц будем использовать и в случае, когда их строение согласовано известным образом (см. глава III§3), причём элементами одной матрицы являются векторы линейного пространства \mathcal{X} над полем \mathbf{K} , а элементами другой матрицы – числа, т.е. элементы поля \mathbf{K} .

В качестве упражнения предлагается доказать, что и в этом случае для умножения матриц справедливы 6 свойств (см. глава III§3).

3. Некоторые свойства линейных пространств.

Теорема 1. В любом линейном пространстве нулевой вектор единственный.

Доказательство. Пусть $\vec{0}_1, \vec{0}_2 \in \mathcal{X}$, причём для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{X}$, справедливы равенства

$\vec{x} = \vec{x} + \vec{0}_1$ и $\vec{y} = \vec{y} + \vec{0}_2$, т.е. и вектор $\vec{0}_1$, и вектор $\vec{0}_2$ являются нулевыми векторами пространства \mathcal{X} . Отсюда получаем: $\vec{0}_1 = \vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_2 + \vec{0}_1 = \vec{0}_2$. Здесь мы воспользовались коммутативностью сложения, а также приведёнными равенствами, положив $\vec{y} = \vec{0}_1$; $\vec{x} = \vec{0}_2$. Теорема доказана.

Теорема 2. Для любого вектора \vec{x} линейного пространства \mathcal{X} противоположный к нему вектор единственный.

Доказательство. Пусть $\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'' \in \mathcal{X}$, причём $\vec{x} + \vec{x}' = \vec{0}$ и $\vec{x} + \vec{x}'' = \vec{0}$. Отсюда следует, что

$$\vec{x}'' = \vec{x}'' + \vec{0} = \vec{x}'' + (\vec{x} + \vec{x}') = (\vec{x}'' + \vec{x}) + \vec{x}' = \vec{0} + \vec{x}' = \vec{x}'.$$

Здесь мы воспользовались, кроме приведённых равенств ещё 2-ой и 3-ей аксиомами. Теорема доказана.

Теорема 3. Для любого вектора \vec{x} линейного пространства \mathcal{X} справедливо равенство $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Доказательство. Воспользуемся аксиомой 7: $0 \cdot \vec{x} = (0 + 0) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}$. Пусть \vec{x}'' - вектор, противоположный к вектору $0 \cdot \vec{x}$, т.е. $0 \cdot \vec{x} + \vec{x}'' = \vec{0}$. Используем полученное равенство

$$0 \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}. \text{ В результате получим: } \vec{0} = \vec{x}'' + 0 \cdot \vec{x} = \vec{x}'' + (0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}) = (\vec{x}'' + 0 \cdot \vec{x}) + 0 \cdot \vec{x} = \vec{0} + 0 \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} \Leftrightarrow 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}. \text{ Здесь мы воспользовались аксиомами 1, 2 и 3.}$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Вектор, противоположный к вектору \vec{x} линейного пространства \mathcal{X} , равен вектору $(-1) \cdot \vec{x}$.

Доказательство. Действительно, вектор $(-1) \cdot \vec{x}$ удовлетворяет аксиоме 4:

$$\vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = [1 + (-1)] \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}. \text{ Здесь мы воспользовались аксиомами 5, 7 и теоремой 3. Из теоремы 2 следует, что вектор, противоположный к вектору } \vec{x}, \text{ равен } (-1) \cdot \vec{x}. \text{ Теорема доказана.}$$

Замечание. В дальнейшем вектор, противоположный к вектору \vec{x} , будем обозначать так: $-\vec{x}$.

Задача 1. Докажите, что если $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$, то или $\lambda = 0$, или $\vec{x} = \vec{0}$.

Задача 2. Докажите, что $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ для любого числа $\lambda \in \mathbf{K}$.

§2 Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов.

Определение 1. Пусть \mathcal{X} - линейное пространство над полем \mathbf{K} , $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{X}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{K}$. Выражение вида $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m$ будем называть **линейной комбинацией** векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$ с **коэффициентами** $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Запись: $\vec{x} = \text{ЛК}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$ будет означать, что вектор \vec{x} является линейной комбинацией векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$.

Замечание. Очевидно, линейная комбинация линейных комбинаций векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$ также является

линейной комбинацией этих векторов, т.к.

$$\beta_1 (\lambda_{11} \vec{x}_1 + \dots + \lambda_{1m} \vec{x}_m) + \dots + \beta_s (\lambda_{s1} \vec{x}_1 + \dots + \lambda_{sm} \vec{x}_m) =$$

$= (\beta_1 \cdot \lambda_{11} + \dots + \beta_s \cdot \lambda_{s1}) \vec{x}_1 + \dots + (\beta_1 \cdot \lambda_{1m} + \dots + \beta_s \cdot \lambda_{sm}) \vec{x}_m$. Какими аксиомами линейного пространства мы здесь воспользовались?

Определение 2. Пусть \mathcal{X} - линейное пространство над полем \mathbf{K} . Множество всех линейных комбинаций векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{X}$ будем называть **линейной оболочкой, натянутой на векторы** $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$ и обозначать так: $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \rangle$. Таким образом,

$$\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{ \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m; \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{K} \}.$$

Очевидно, $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \rangle \subseteq \mathcal{X}$.

Определение 3. Совокупность векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{X}$ будем называть **линейно зависимой**, если существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{K}$, не равные нулю одновременно и такие, что $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m = \vec{0}$.

В противном случае совокупность $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$ будем называть **линейно независимой**.

Таким образом, одна и та же совокупность векторов не может быть одновременно и линейно зависимой, и линейно независимой.

Приведём ещё одно определение линейно независимой системы векторов, разумеется, равносильное предыдущему.

Определение 4. Совокупность векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{X}$ будем называть **линейно независимой**, если

из равенства нулевому вектору их линейной комбинации следует равенство нулю всех коэффициентов этой линейной комбинации, т.е. из равенства

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m = \vec{0} \text{ следует, что } \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0.$$

Замечание. Линейную комбинацию этих векторов можно записать используя определение умножения матриц: $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m = \Lambda \cdot X$, где $\Lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_m)$, а

$X = (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_m)^T$. Тогда определение линейно независимой совокупности векторов

$X = (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_m)^T$ можно записать так: $\Lambda \cdot X = \vec{0} \Rightarrow \Lambda = 0$.

Пример 1. Пусть $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$. Очевидно, справедливо равенство: $2A_1 + A_2 - A_3 = O$. Следовательно, совокупность матриц A_1, A_2, A_3 линейно зависима по определению 3. В этом примере мы рассматриваем матрицы A_1, A_2, A_3 как векторы вещественного линейного пространства $M_2(\mathbf{R})$.

Пример 2. Покажем, что совокупность векторов

$$\vec{e}_1 = (1 \ 0 \dots 0)^T, \quad \vec{e}_2 = (0 \ 1 \dots 0)^T, \dots, \vec{e}_n = (0 \ 0 \dots 1)^T$$

вещественного пространства $\mathcal{X} = \mathbf{R}_n$ строк длины n линейно независима.

Составим линейную комбинацию этих векторов и приравняем её к нулевому вектору:

$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0} \Leftrightarrow (\lambda_1 \ \lambda_2 \dots \lambda_n) = (0 \ 0 \dots 0)$. Из определения равенства матриц отсюда следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Таким образом, по определению 4 эта совокупность линейно независима.

Пример 3. Покажем, что совокупность матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ линейно независима. Составим линейную}$$

комбинацию этих матриц и приравняем её к нулевой матрице:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = O \Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = O \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 & 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 & 4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Легко подсчитать ранг матрицы этой системы: $r \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$. Следовательно, эта

система имеет единственное решение, т.е. нулевое (ранг матрицы системы равен числу неизвестных).

Итак, из равенства $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = O$ следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Следовательно, по определению 4 эта совокупность матриц линейно независима. В этом примере мы рассматриваем матрицы A_1, A_2, A_3 как векторы вещественного линейного пространства $M_2(\mathbf{R})$.

Пример 4. Множество $\mathcal{X} = \mathbf{C}_2$ комплексных строк длины 2 является вещественным линейным пространством, потому что такие строки можно складывать и умножать на вещественные числа, и при этом выполняются все 8 аксиом линейного пространства. Покажем, что совокупность строк

$\vec{x}_1 = (2+i \ 3-2i)$, $\vec{x}_2 = (-1+2i \ 2+3i)$ этого пространства линейно независимая.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 = \vec{0} &\Leftrightarrow \lambda_1(2+i \ 3-2i) + \lambda_2(-1+2i \ 2+3i) = (0 \ 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2\lambda_1 + \lambda_1 i \ 3\lambda_1 - 2\lambda_1 i) + (-\lambda_2 + 2\lambda_2 i \ 2\lambda_2 + 3\lambda_2 i) = (0 \ 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((2\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 + 2\lambda_2)i) \ [(3\lambda_1 + 2\lambda_2) + (-2\lambda_1 + 3\lambda_2)i] = (0 \ 0) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Пусть

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 + 2\lambda_2)i = 0 \\ (3\lambda_1 + 2\lambda_2) + (-2\lambda_1 + 3\lambda_2)i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

В этой выкладке важно, что числа λ_1 и λ_2 вещественные, т.к. \mathcal{X} – вещественное пространство по условию.

Пример 5. Множество $\mathcal{X}_1 = \mathbb{C}_2$ комплексных строк длины 2 является комплексным линейным пространством, потому что такие строки можно складывать и умножать на комплексные числа, и при этом выполняются все 8 аксиом линейного пространства. Заметим, что пространство \mathcal{X} из примера 4 и пространство \mathcal{X}_1 различные, несмотря на то, что как множества они равны.

Покажем, что совокупность строк $\vec{x}_1 = (2+i \ 3-2i)$, $\vec{x}_2 = (-1+2i \ 2+3i)$ этого пространства линейно зависима. Действительно, $i \cdot \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = (2i-1 \ 3i+2) - (-1+2i \ 2+3i) = (0 \ 0) = \vec{0}$, причём $i \neq 0$, $-1 \neq 0$.

В предыдущем примере мы не могли взять в качестве коэффициента число i , т.к. пространство \mathcal{X} является вещественным.

Теорема 1. Совокупность векторов линейного пространства, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

Доказательство. Пусть i -ый вектор в совокупности векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{X}$ нулевой, т.е. $\vec{x}_i = \vec{0}$. Тогда, очевидно, справедливо равенство $0 \cdot \vec{x}_1 + \dots + 1 \cdot \vec{x}_i + \dots + 0 \cdot \vec{x}_m = \vec{0}$, причём $1-i$ -ый коэффициент не равен 0. Таким образом, совокупность векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$ линейно зависима по определению 3.

Теорема 2. Если к линейно зависимой совокупности векторов линейного пространства добавить ещё несколько, то получившаяся совокупность будет также линейно зависима.

Доказательство. Пусть совокупность векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{X}$ линейного пространства над полем \mathbb{K} линейно зависима, т.е. существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$

, не равные нулю одновременно и такие, что $\lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_m \bar{x}_m = \vec{0}$. Покажем, что тогда совокупность векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{x}_{m+1}, \dots, \bar{x}_{m+k} \in \mathcal{X}$ также линейно зависима.

Действительно, очевидно, справедливо равенство

$\lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_m \bar{x}_m + 0 \cdot \bar{x}_{m+1} + \dots + 0 \cdot \bar{x}_{m+k} = \vec{0}$, причём не все коэффициенты этой линейной комбинации равны 0, т.к. не все коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ равны нулю.

Следовательно, совокупность векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{x}_{m+1}, \dots, \bar{x}_{m+k}$ линейно зависима по определению 3.

Теорема 3. Если из линейно независимой совокупности векторов удалить несколько, то получившаяся совокупность будет также линейно независимой.

Доказательство проведём от противного с использованием теоремы 2. Пусть совокупность векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{x}_{m+1}, \dots, \bar{x}_{m+k} \in \mathcal{X}$ линейно независима, а совокупность $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ линейно зависима.

Тогда по теореме 2 исходная совокупность векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{x}_{m+1}, \dots, \bar{x}_{m+k}$ будет также линейно зависима, что противоречит условию, и теорема доказана.

Теорема 4. Критерий линейной зависимости. Для того чтобы совокупность векторов линейного пространства была линейно зависима, необходимо и достаточно, чтобы один из векторов этой совокупности был линейной комбинацией остальных.

Доказательство.

Необходимость. Пусть совокупность векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m \in \mathcal{X}$ линейного пространства над полем \mathbf{K} линейно зависима, т.е. существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{K}$, не равные нулю одновременно и такие, что $\lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_i \bar{x}_i + \dots + \lambda_m \bar{x}_m = \vec{0}$, и пусть для определённости $\lambda_i \neq 0$ ($1 \leq i \leq m$). Тогда из последнего равенства получаем:

$$\bar{x}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \bar{x}_1 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \bar{x}_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \bar{x}_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_m}{\lambda_i} \bar{x}_m, \text{ и необходимость}$$

доказана.

Достаточность. Пусть $\bar{x}_i = \alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_{i-1} \bar{x}_{i-1} + \alpha_{i+1} \bar{x}_{i+1} + \dots + \alpha_m \bar{x}_m$, ($1 \leq i \leq m$). Тогда справедливо равенство: $\alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_{i-1} \bar{x}_{i-1} - 1 \cdot \bar{x}_i + \alpha_{i+1} \bar{x}_{i+1} + \dots + \alpha_m \bar{x}_m = \vec{0}$, причём $-1 \neq 0$. Следовательно, совокупность векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ линейно зависима по определению 3, и достаточность доказана.

Теорема 5. Если после добавления к линейно независимой совокупности векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ линейного пространства \mathcal{X} над полем \mathbf{K} вектора $\bar{x}_{m+1} \in \mathcal{X}$ новая совокупность $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{x}_{m+1}$ становится линейно зависима, то добавленный вектор \bar{x}_{m+1} есть линейная комбинация элементов исходной совокупности, т.е.

$$\bar{x}_{m+1} = \text{ЛК}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m).$$

Доказательство. По условию совокупность $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{x}_{m+1}$ линейно зависима. Это означает, что существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1} \in \mathbf{K}$, не равные нулю одновременно и такие, что

$$\vec{z}_2 = \vec{y}_2 - \frac{c_{2m}}{c_{1m}} \vec{y}_1 = \left(c_{21} - \frac{c_{2m}}{c_{1m}} c_{11} \right) \vec{x}_1 + \left(c_{22} - \frac{c_{2m}}{c_{1m}} c_{12} \right) \vec{x}_2 + \dots + \left(c_{2(m-1)} - \frac{c_{2m}}{c_{1m}} c_{1(m-1)} \right) \vec{x}_{m-1}$$

$$\vec{z}_k = \vec{y}_k - \frac{c_{km}}{c_{1m}} \vec{y}_1 = \left(c_{k1} - \frac{c_{km}}{c_{1m}} c_{11} \right) \vec{x}_1 + \left(c_{k2} - \frac{c_{km}}{c_{1m}} c_{12} \right) \vec{x}_2 + \dots + \left(c_{k(m-1)} - \frac{c_{km}}{c_{1m}} c_{1(m-1)} \right) \vec{x}_{m-1}$$

Эта совокупность является линейно зависимой по индукционному предположению, т.к. $\vec{z}_i = \text{ЛК}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{m-1})$, $2 \leq i \leq k$, причём число линейных комбинаций $k-1$ больше числа комбинируемых элементов $m-1$, т.к. $k > m$. Следовательно, существуют числа $\lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbf{K}$, не равные нулю одновременно и

$$\begin{aligned} \text{такие, что } \lambda_2 \vec{z}_2 + \dots + \lambda_k \vec{z}_k = \vec{0} &\Leftrightarrow \lambda_2 \left(\vec{y}_2 - \frac{c_{2m}}{c_{1m}} \vec{y}_1 \right) + \dots + \lambda_k \left(\vec{y}_k - \frac{c_{km}}{c_{1m}} \vec{y}_1 \right) = \vec{0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow - \left(\lambda_2 \frac{c_{2m}}{c_{1m}} + \dots + \lambda_k \frac{c_{km}}{c_{1m}} \right) \vec{y}_1 + \lambda_2 \vec{y}_2 + \dots + \lambda_k \vec{y}_k = \vec{0}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что совокупность $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k$ линейно зависима, т.к. коэффициенты $\lambda_2, \dots, \lambda_k$ не равны нулю одновременно. В этом случае величина первого коэффициента не имеет значения, т.к. ненулевой коэффициент имеется среди последних $k-1$ коэффициентов. Теорема б доказана.

Конечномерные линейные пространства.

Пусть \mathcal{X} - линейное пространство над полем \mathbf{K} , S - некоторая совокупность векторов из \mathcal{X} . Очевидно, линейная оболочка, натянутая на векторы из совокупности S является подмножеством линейного пространства \mathcal{X} , т.е. $\langle S \rangle \subseteq \mathcal{X}$.

Определение 1. Совокупность S векторов линейного пространства \mathcal{X} называется **порождающей** (или **полной**, или **системой образующих**) этого пространства, если каждый вектор этого пространства является линейной комбинацией векторов этой совокупности, т.е.

$$(S \text{ - порождающая совокупность линейного пространства } \mathcal{X}) \Leftrightarrow \langle S \rangle = \mathcal{X}.$$

Определение 2. Если в линейном пространстве \mathcal{X} существует **конечная** порождающая система векторов, то пространство \mathcal{X} называется **конечномерным**. В противном случае – **бесконечномерным**.

$$(\mathcal{X} \text{ – конечномерное}) \Leftrightarrow (\exists \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{X} : \mathcal{X} = \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \rangle)$$

Замечание. В конечномерном линейном пространстве не существует сколь угодно больших (по числу векторов) линейно независимых совокупностей векторов.

Пусть $\mathcal{X} = \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \rangle$. Тогда любой вектор $\vec{y} \in \mathcal{X}$ есть линейная комбинация векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$.

Следовательно, по теореме 6 §2 любая совокупность векторов, содержащая более чем m векторов, будет линейно зависимой.

Пример 1. Покажем, что пространство $\mathcal{X} = \mathbf{R}_n$ вещественных строк длины n является конечномерным вещественным пространством. Действительно, любая строка \vec{x} из этого пространства имеет вид: $\vec{x} = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1, n}$.

Следовательно, $\vec{x} = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = \alpha_1(1 0 \dots 0) + \alpha_2(0 1 \dots 0) + \dots + \alpha_n(0 0 \dots 1) = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$,

т.е. $\mathcal{X} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$. (Обозначения из примера 2 §2).

Пример 2. Покажем, что пространство $\mathcal{X} = M_2(\mathbf{C})$ квадратных комплексных матриц порядка 2 является конечномерным комплексным пространством. Любая квадратная комплексная матрица A порядка 2 имеет вид: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, где $a_{ij} \in \mathbf{C}$,

$i, j = 1, 2$. Следовательно, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, и

совокупность матриц $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ является

порождающей для пространства $\mathcal{X} = M_2(\mathbf{C})$. Следовательно, $\mathcal{X} = M_2(\mathbf{C})$ - конечномерное комплексное пространство.

Пример 3. Покажем, что пространство всех многочленов с вещественными коэффициентами, т.е.

$\mathcal{X} = \mathbf{R}[t] = \{a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, a_i \in \mathbf{R}, i = \overline{0, n}\}$ является

бесконечномерным вещественным пространством. Докажем от противного. Пусть в пространстве \mathcal{X} существует конечная порождающая система $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$. Это означает, что любой многочлен $f(t) \in \mathcal{X}$ имеет вид:

$f(t) = b_1 f_1(t) + b_2 f_2(t) + \dots + b_m f_m(t)$, где $b_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1, m}$.

Тогда, очевидно, $\deg f(t)$ - степень многочлена $f(t)$ не превосходит наибольшей из степеней многочленов $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$, т.е.

$\deg f(t) \leq \max(\deg f_1(t), \deg f_2(t), \dots, \deg f_m(t)) = k$.

Таким образом, степень любого многочлена не превосходит числа k , что, конечно, неверно, т.к. $\deg t^{k+1} = k+1 > k$. Следовательно, наше предположение неверно, и в пространстве \mathcal{X} не существует конечной порождающей системы. Таким образом, \mathcal{X} - бесконечномерное вещественное пространство.

Пример 4. Вещественное линейное пространство $\mathcal{X} = C([a, b])$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций (пример 4 из §1) также является бесконечномерным линейным пространством.

Теорема 1. Все линейно независимые и порождающие системы векторов одного и того же конечномерного линейного пространства над полем \mathbf{K} содержат одинаковое количество векторов.

Доказательство. Пусть $\mathcal{X} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m \rangle$ и $\mathcal{Y} = \langle \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k \rangle$, причём совокупности векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$

и $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k$ линейно независимые. Докажем от противного, что $k = m$. Пусть $k < m$. Любой вектор \bar{z} этого пространства есть линейная комбинация векторов совокупности $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k$, т.к. она порождающая. В частности, каждый вектор $\bar{x}_i = \text{ЛК}(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k)$, $i = \overline{1, m}$. Число m линейных комбинаций векторов $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k$ больше числа комбинируемых. Следовательно, по теореме 6 §2 совокупность векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ линейно зависима, что противоречит её линейной независимости. Таким образом, $k \geq m$. Аналогично доказываем, что $k \leq m$, откуда и получаем равенство $k = m$.

Определение 3. Упорядоченная, линейно независимая и порождающая система векторов конечномерного линейного пространства \mathcal{X} над полем \mathbf{K} называется **базисом** этого пространства. Число векторов в базисе будем называть размерностью этого пространства и обозначать так: $\dim \mathcal{X}$.

Если мы хотим подчеркнуть, что \mathcal{X} - линейное пространство над полем \mathbf{K} , то его размерность будем обозначать ещё и так: $\dim_{\mathbf{K}} \mathcal{X}$.

Корректность этого определения следует из теоремы 1. Далее мы будем изучать только конечномерные линейные пространства.

Пример 5. В примере 2 §2 мы показали, что совокупность строк $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$, где $\bar{e}_1 = (1\ 0 \dots 0)$, $\bar{e}_2 = (0\ 1 \dots 0)$, ..., $\bar{e}_n = (0\ 0 \dots 1)$, линейно независимая, а в примере 1 §3 доказали, что эта совокупность порождающая для пространства \mathbf{R}_n - вещественных строк длины n . Следовательно, $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ - базис \mathbf{R}_n и $\dim \mathbf{R}_n = n$.

Пример 6. Докажите, что базисом пространства вещественных квадратных матриц второго порядка, т.е.

пространства $\mathcal{X} = M_2(\mathbf{R})$ является упорядоченная совокупность матриц

$e = (A_1, A_2, A_3, A_4)$, где

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, $\dim M_2(\mathbf{R}) = 4$.

Пример 7. Докажите, что базисом пространства всех многочленов от буквы t с вещественными коэффициентами степени не превосходящей 3, т.е. базисом $\mathcal{X} = \mathbf{R}_3[t]$ является совокупность $e = (1, t, t^2, t^3)$, и тогда $\dim \mathbf{R}_3[t] = 4$. Заметим, что

совокупность $e' = (1, t, t^3, t^2)$ также является базисом этого пространства, но это другой базис, т.к. эти одночлены расположены в другом порядке.

Пример 8. Множество комплексных чисел $\mathcal{X} = \mathbb{C}$ является вещественным линейным пространством, т.к. комплексные числа можно складывать, умножать на вещественные числа, и для этих операций выполнены 8 аксиом линейного пространства. Любое комплексное число может быть записано в алгебраической форме: $z = a + ib$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Следовательно, числа 1 и i являются порождающей системой для пространства \mathcal{X} . Из равенства $a + ib = 0$ следует: $a = b = 0$. Таким образом, совокупность чисел 1, i линейно независимая. Поэтому числа 1 и i являются базисом пространства \mathcal{X} и $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{X} = 2$. Это обозначение подчёркивает, что пространство \mathcal{X} в данном примере является **вещественным** линейным пространством.

Пример 9. Множество комплексных чисел $\mathcal{X}_1 = \mathbb{C}$ является комплексным линейным пространством, т.к. комплексные числа можно складывать, умножать на комплексные числа, и для этих операций выполнены 8 аксиом линейного пространства. Любое комплексное число z можно записать так: $z = z \cdot 1$, где $1 \in \mathbb{C}$. Следовательно, число 1 является порождающей системой для пространства \mathcal{X}_1 . Из равенства $z \cdot 1 = 0$ следует: $z = 0$. Таким образом, совокупность, состоящая из числа 1, линейно независимая. Поэтому число 1 является базисом пространства \mathcal{X}_1 и $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{X}_1 = 1$. Это обозначение подчёркивает, что пространство \mathcal{X}_1 в данном примере является **комплексным** линейным пространством.

Задача 1. Найдите $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{X}$, где $\mathcal{X} = M_2(\mathbb{C})$.

Задача 2. Найдите $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{X}_1$, где $\mathcal{X}_1 = M_2(\mathbb{C})$.

Теорема 2. Любая порождающая система векторов n -мерного линейного пространства \mathcal{X} над полем \mathbb{K} , содержащая n векторов, является линейно независимой.

Доказательство. Пусть $\mathcal{X} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle$. Доказательство проведём от противного.

Пусть система векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ линейно зависима. Тогда из теоремы 4§2 следует, что один из этих векторов, например, \bar{x}_n есть линейная комбинация остальных векторов, т.е. $\bar{x}_n = \text{ЛК}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$. Следовательно,

$\mathcal{X} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n \rangle = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, \text{ЛК}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}) \rangle = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1} \rangle$. Здесь мы

воспользовались замечанием к определению 1§2. Пусть $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ - базис \mathcal{X} . Тогда $\bar{y}_i = \text{ЛК}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$, $i = \overline{1, n}$, т.к.

$\mathcal{X} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1} \rangle$. Следовательно, по теореме 6§2 совокупность векторов $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ линейно зависима, что противоречит тому, что это базис \mathcal{X} . Следовательно, наше предположение неверно, и система векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ линейно независима.

Следствие. Любая упорядоченная порождающая система векторов n - мерного линейного пространства, содержащая n векторов, является базисом этого пространства.

Теорема 3. Любая линейно независимая система векторов n - мерного линейного пространства \mathcal{X} над полем \mathbf{K} , содержащая n векторов, является порождающей.

Доказательство. Пусть $\mathcal{X} = \langle \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n \rangle$, где $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ - базис \mathcal{X} , и пусть $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ линейно независимая система векторов. Покажем, что любой вектор $\bar{x} \in \mathcal{X}$ есть линейная комбинация векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$. Каждый из векторов совокупности $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}$ есть линейная комбинация векторов базиса $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$. Число векторов этой совокупности больше числа комбинируемых векторов базиса, т.к. $n+1 > n$. Следовательно, эта совокупность $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}$ линейно зависима, а тогда по теореме 5§2 вектор \bar{x} есть линейная комбинация векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$. Следовательно, $\mathcal{X} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle$ и совокупность $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ - порождающая система пространства \mathcal{X} .

Следствие. Любая упорядоченная линейно независимая система векторов n - мерного линейного пространства, содержащая n векторов, является базисом этого пространства.

Лемма. Если число векторов линейно независимой совокупности $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ конечномерного линейного пространства \mathcal{X} меньше размерности этого пространства $m < n = \dim \mathcal{X}$, то найдётся такой вектор

$\bar{x}_{m+1} \in \mathcal{X}$, что совокупность векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{x}_{m+1}$ линейно независима.

Доказательство проведём от противного. Пусть для любого вектора $\bar{x} \in \mathcal{X}$ система векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{x}$

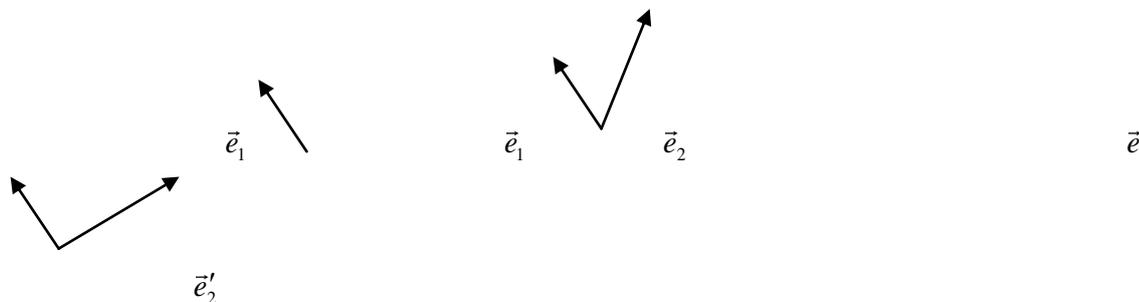
линейно зависима. Тогда по теореме 5§2 вектор $\bar{x} = \text{ЛК}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$. Следовательно, $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ - линейно независимая и порождающая система, т.е. базис \mathcal{X} , а тогда $\dim \mathcal{X} = m < n = \dim \mathcal{X}$. Получили противоречие. Следовательно, наше предположение было неверно.

Теорема 4. Любую линейно независимую систему векторов конечномерного линейного пространства можно дополнить до базиса этого пространства.

Доказательство. Пусть $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ - линейно независимая система векторов и $\dim \mathcal{X} = n$.

Если $m = n$, то это базис по следствию к теореме 3. Если $m < n$, то по лемме найдётся такой вектор $\bar{x}_{m+1} \in \mathcal{X}$, что совокупность векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{x}_{m+1}$ линейно независима. Если $m+1 = n$, то это базис по следствию к теореме 3. В противном случае продолжим этот процесс. Через $n-m$ шагов построим базис \mathcal{X} .

Замечание. Данную линейно независимую систему векторов (случай $m < n$) можно дополнить до базиса пространства бесчисленным множеством способов. Например, на рисунке показано, что вектор $\bar{e}_1 \in V_2$ можно дополнить до базиса V_2 пространства свободных векторов на плоскости вектором \bar{e}_2 , а можно и вектором \bar{e}'_2 и т.д.



Теорема 5. Любая порождающая система векторов конечномерного линейного пространства содержит базис этого пространства.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m \rangle$. Если $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ - линейно независимая система векторов, то это базис \mathcal{A} . В противном случае один из этих векторов, например, $\bar{x}_m = \text{ЛК}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1})$. Тогда

$\mathcal{A} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1}, \bar{x}_m \rangle = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1}, \text{ЛК}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1}) \rangle = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1} \rangle$. Здесь мы воспользовались замечанием к определению 1 §2. Если $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1}$ - линейно независимая система векторов, то это базис \mathcal{A} . В противном случае продолжим процесс выбрасывания «лишних» векторов, и через $m - n$ шагов получим базис \mathcal{A} . Теорема доказана.

Лекция 14. Ортогонализация Грамма-Шмидта.

§4. Координаты вектора. Матрица перехода.

Пусть $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ - базис \mathcal{A} - линейного пространства над полем \mathbf{K} . Из определения базиса следует, что любой вектор \bar{x} этого пространства может быть представлен в виде:

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n, \quad x_i \in \mathbf{K}, \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

Или, что то же самое: $\bar{x} = (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2 \ \dots \ \bar{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \bar{x} = e \cdot X$, где e - базис \mathcal{A} , $X = (x_1 \dots x_n)^T$.

Определение 1. Коэффициенты x_1, x_2, \dots, x_n в разложении (1) вектора \bar{x} по базису e будем называть **координатами** вектора \bar{x} относительно базиса e .

Координаты вектора \bar{x} относительно базиса e будем записывать в столбик и обозначать так: $[\bar{x}]_e$.

Таким образом, $[\bar{x}]_e \stackrel{def}{=} (x_1 x_2 \dots x_n)^T$, и $\bar{x} = e \cdot [\bar{x}]_e$.

Теорема 1. Координаты вектора относительно данного базиса определены однозначно.

Доказательство. Пусть $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ - базис \mathcal{X} - линейного пространства над полем \mathbf{K} , $\bar{x} \in \mathcal{X}$, и пусть вектор \bar{x} разложен по базису e двумя способами:

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n, \quad x_i \in \mathbf{K}, \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

$$\bar{x} = x'_1 \bar{e}_1 + x'_2 \bar{e}_2 + \dots + x'_n \bar{e}_n, \quad x'_i \in \mathbf{K}, \quad i = \overline{1, n} \quad (2)$$

Вычтем из равенства (1) равенство (2). В результате получим:

$$\bar{0} = (x_1 - x'_1) \bar{e}_1 + (x_2 - x'_2) \bar{e}_2 + \dots + (x_n - x'_n) \bar{e}_n.$$

Из последнего равенства следует: $x_1 - x'_1 = x_2 - x'_2 = \dots = x_n - x'_n = 0$, т.к. $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ - базис \mathcal{X} и потому линейно независимая система векторов. Следовательно, $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, \dots, x_n = x'_n$, и теорема доказана.

Проведём это же доказательство, используя матричную форму записи. Пусть справедливы равенства

$$\bar{x} = e \cdot X, \quad \text{где } X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T \quad (3)$$

$$\bar{x} = e \cdot X', \quad \text{где } X' = (x'_1 \ x'_2 \ \dots \ x'_n)^T \quad (4)$$

Вычтем из равенства (3) равенство (4). В результате получим:

$$\bar{0} = eX - eX' = e(X - X').$$

Из равенства $e(X - X') = \bar{0}$ следует: $X - X' = \bar{0} \Leftrightarrow X = X'$, т.к. e - линейно независимая система векторов.

Здесь мы воспользовались дистрибутивностью и продемонстрировали насколько удобнее пользоваться матричной формой записи.

Замечание. Доказанное утверждение в матричной форме может быть сформулировано так: если для вектора \bar{x} справедливо равенство $\bar{x} = e \cdot X$, где e - базис, а $X = (x_1 \ \dots \ x_n)^T$ - столбец чисел, то $X = [\bar{x}]_e$.

Действительно, только один числовой столбец, а именно координатный столбец $[\bar{x}]_e$ может удовлетворять приведённому матричному равенству.

Пример 1. Пусть $\mathcal{X} = \mathbf{R}_n$, $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$, где $\bar{e}_i = (0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)$ - строка, у которой на i -ом месте

стоит единица, $\bar{x} = (1 \ 2 \ \dots \ n)$. Очевидно, справедливо равенство:

$$\bar{x} = (1 \ 2 \ \dots \ n) = 1 \cdot \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2 + \dots + n \cdot \bar{e}_n. \quad \text{Следовательно, } [\bar{x}]_e = (1 \ 2 \ \dots \ n)^T.$$

Теорема 2. При сложении векторов их координаты складываются. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

$$\text{Равенства (8), очевидно, означают, что } [\vec{e}'_1]_e = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{n1} \end{pmatrix}; \quad [\vec{e}'_2]_e = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{n2} \end{pmatrix}; \quad [\vec{e}'_n]_e = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \dots \\ c_{nm} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Составим из полученных столбцов матрицу } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbf{K}).$$

В матричной форме равенства (8) можно записать так: $e' = e \cdot C$. Действительно, $e \cdot C =$

$$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix} = ((c_{11} \cdot \vec{e}_1 + c_{21} \cdot \vec{e}_2 + \dots + c_{n1} \cdot \vec{e}_n) \dots (c_{1n} \cdot \vec{e}_1 + c_{2n} \cdot \vec{e}_2 + \dots + c_{nm} \cdot \vec{e}_n)) =$$

$$= (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n) = e'.$$

Определение 2. Матрицей перехода от базиса $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ конечномерного линейного пространства \mathcal{X} над полем \mathbf{K} к базису $e' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)$ того же пространства будем называть такую матрицу $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$, что для её элементов справедливы равенства (8), или, что то же самое $e' = e \cdot C$.

Последнее матричное равенство эквивалентно следующему: $C = ([\vec{e}'_1]_e \ [\vec{e}'_2]_e \ \dots \ [\vec{e}'_n]_e)$. Обозначать матрицу перехода от базиса e к базису e' будем так: $C_{e \rightarrow e'}$.

Таким образом, из определения 2 следует, что $e' = e \cdot C_{e \rightarrow e'} \Leftrightarrow C_{e \rightarrow e'} \stackrel{def}{=} ([\vec{e}'_1]_e \ [\vec{e}'_2]_e \ \dots \ [\vec{e}'_n]_e)$.

Замечание 1. Из теоремы 1 следует, что для данных базисов e и e' матрица $C_{e \rightarrow e'}$ определена однозначно,

т.е. существует **единственная** матрица $C \in M_n(\mathbf{K})$ такая, что $e' = e \cdot C$. Таким образом, из равенства

$$e' = e \cdot C \text{ следует, что } C = C_{e \rightarrow e'}.$$

Замечание 2. Очевидно, $C_{e \rightarrow e} = E$.

Теорема 3. Для любых базисов e, e' и e'' конечномерного линейного пространства \mathcal{X} над полем \mathbf{K} и для любого вектора \vec{x} этого пространства справедливы равенства:

- 1) $[\vec{x}]_e = C_{e \rightarrow e'} \cdot [\vec{x}]_{e'}$;
- 2) $C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e''} = C_{e \rightarrow e''}$; $C_{e'' \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e} = C_{e'' \rightarrow e}$;
- 3) $C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e} = E$; $C_{e' \rightarrow e} \cdot C_{e \rightarrow e'} = E$.

Доказательство проведём используя матричную форму записи.

1) Из определения 1 получаем: $\vec{x} = e \cdot [\vec{x}]_e$ и $\vec{x} = e' \cdot [\vec{x}]_{e'}$. Из определения 2 следует, что $e' = e \cdot C_{e \rightarrow e'}$. подставим это выражение вместо базиса e' в последнее равенство: $\vec{x} = e' \cdot [\vec{x}]_{e'} = (e \cdot C_{e \rightarrow e'}) \cdot [\vec{x}]_{e'} = e \cdot (C_{e \rightarrow e'} \cdot [\vec{x}]_{e'})$. Из замечания после теоремы 1 отсюда следует, что $[\vec{x}]_e = C_{e \rightarrow e'} \cdot [\vec{x}]_{e'}$.

2) Из определения 2 следует, что $e' = e \cdot C_{e \rightarrow e'}$ и $e'' = e' \cdot C_{e' \rightarrow e''}$. Подставим в последнее равенство выражение для e' из предыдущего равенства. В результате получим:
 $e'' = e' \cdot C_{e' \rightarrow e''} = (e \cdot C_{e \rightarrow e'}) \cdot C_{e' \rightarrow e''} = e \cdot (C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e''})$.

Из замечания 1 к определению 2 следует: $C_{e \rightarrow e''} = C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e''}$. Второе равенство получается из полученного, если базисы e и e'' поменять местами.

3) Положим $e'' = e$. Тогда из предыдущих равенств получаем: $C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e} = C_{e \rightarrow e} = E$ и $C_{e' \rightarrow e} \cdot C_{e \rightarrow e'} = C_{e' \rightarrow e'} = E$.

Теорема доказана.

Замечание. Таким образом, $C_{e \rightarrow e'} = C_{e' \rightarrow e}^{-1}$ и $C_{e' \rightarrow e} = C_{e \rightarrow e'}^{-1}$.

Пример 2. Пусть $\mathcal{X} = \mathbf{R}_2[t]$ - пространство многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше второй. Любой многочлен этого пространства имеет вид: $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c \cdot 1$, где $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Следовательно, совокупность $1, t, t^2$ - порождающая для пространства \mathcal{X} , т.е. $\mathcal{X} = \langle 1, t, t^2 \rangle$.

Из равенства $a \cdot t^2 + b \cdot t + c \cdot 1 = 0$ и определения равенства многочленов следует, что $a = b = c = 0$. Следовательно, совокупность $e = (1, t, t^2)$ является линейно независимой, т.е. базисом пространства \mathcal{X} и $\dim \mathcal{X} = 3$. Покажем, что совокупность $e' = (1, t+1, (t+1)^2)$ также является базисом пространства \mathcal{X} .

Из формулы Тейлора для многочленов степени не более второй следует, что любой такой многочлен можно записать следующим образом:

$f(t) = f(-1) \cdot 1 + \frac{f'(-1)}{1!} (t+1) + \frac{f''(-1)}{2!} (t+1)^2$. Таким образом, совокупность $e' = (1, t+1, (t+1)^2)$ - порождающая для пространства \mathcal{X} , причём $\dim \mathcal{X} = 3$.

Следовательно, по следствию к теореме 2 совокупность e' является базисом пространства \mathcal{X} . Подсчитаем матрицы перехода $C_{e \rightarrow e'}$ и $C_{e' \rightarrow e}$.

Очевидно, справедливы равенства:

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ t + 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ (t + 1)^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot t + 1 \cdot t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}'_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \end{cases} \Leftrightarrow C_{e \rightarrow e'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицу $C_{e' \rightarrow e}$ можно найти с помощью теоремы 3, т.е. как матрицу, обратную к матрице $C_{e \rightarrow e'}$. Мы найдём эту матрицу исходя из определения.

Очевидно, справедливы равенства:

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (t+1) + 0 \cdot (t+1)^2 \\ t = -1 \cdot 1 + 1 \cdot (t+1) + 0 \cdot (t+1)^2 \\ t^2 = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (t+1) + 1 \cdot (t+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}'_1 + 0 \cdot \vec{e}'_2 + 0 \cdot \vec{e}'_3 \\ \vec{e}_2 = -1 \cdot \vec{e}'_1 + 1 \cdot \vec{e}'_2 + 0 \cdot \vec{e}'_3 \\ \vec{e}_3 = 1 \cdot \vec{e}'_1 - 2 \cdot \vec{e}'_2 + 1 \cdot \vec{e}'_3 \end{cases} \Leftrightarrow C_{e' \rightarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Подпространства конечномерных линейных пространств.

Определение 1. Пусть \mathcal{X} - линейное пространство над полем \mathbf{K} . Подмножество P векторов этого пространства будем называть **подпространством** этого пространства, если оно само является линейным пространством над полем \mathbf{K} относительно тех операций сложения и умножения на числа поля \mathbf{K} , которые имеются в \mathcal{X} .

Теорема 1. Критерий подпространства.

Для того чтобы подмножество P линейного пространства \mathcal{X} над полем \mathbf{K} было подпространством этого пространства, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнуто относительно операций сложения и умножения на числа поля \mathbf{K} , которые имеются в \mathcal{X} , т.е. чтобы выполнялись следующие два требования:

- 1) для любых векторов \vec{x}, \vec{y} множества P их сумма $\vec{x} + \vec{y}$ также принадлежит множеству P ;
- 2) для любого вектора \vec{x} множества P и любого числа $\lambda \in \mathbf{K}$ их произведение $\lambda \cdot \vec{x}$ также принадлежит множеству P .

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Выполнение требований 1) и 2) означает, что на множестве P определены операции сложения и умножения на числа поля \mathbf{K} , совпадающие с соответствующими операциями на \mathcal{X} . Проверим выполнение 8 аксиом. Аксиомы 1,2,5-8 выполнены для всех векторов из \mathcal{X} , в частности, для всех векторов подмножества P .

Покажем, что выполнена и 3-я аксиома. Для этого покажем, что $\vec{0} \in P$. Из условия 2) следует, что если $\vec{x} \in P$, то и $\vec{0} = 0 \cdot \vec{x} \in P$.

Покажем, что выполнена и 4-я аксиома. Для этого покажем, что если $\vec{x} \in P$, то и $-\vec{x} \in P$. Из условия 2) следует, что если $\vec{x} \in P$, то и $-\vec{x} = (-1) \cdot \vec{x} \in P$.

Теорема доказана.

Пример 1. Подмножества $P = \{\vec{0}\}$ и \mathcal{X} являются подпространствами линейного пространства \mathcal{X} . Эти подпространства мы будем называть тривиальными.

Замечание. По определению размерность линейного пространства, состоящего только из нулевого вектора, равна нулю, т.е. $\dim\{\vec{0}\} \stackrel{def}{=} 0$.

Пример 2. Пусть векторы $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{X}$ - линейному пространству полем \mathbf{K} . По теореме 1 подмножество $P = \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \rangle$ является подпространством линейного пространства \mathcal{X} , т.к. сумма двух линейных комбинаций векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$ также является линейной комбинацией этих векторов, и произведение любого числа $\lambda \in \mathbf{K}$ на линейную комбинацию этих векторов также является линейной комбинацией этих векторов.

Пример 3. Пусть $\mathcal{X} = \mathbf{R}_2[t]$ - пространство многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше второй $P = \mathbf{R}_1[t] = \{c_0 + c_1 t\}$. Очевидно, $P \subset \mathcal{X}$ и P является подпространством \mathcal{X} . Например, потому, что $P = \langle 1, t \rangle$.

Пример 4. Пусть $\mathcal{X} = \mathbf{R}^n$; $A \in M_m(\mathbf{R})$. Обозначим через P множество решений системы линейных однородных алгебраических уравнений $AX = 0$, т.е. $P = \{Y, Y \in \mathcal{X} : AY = 0\}$. Подмножество P является подпространством линейного пространства \mathcal{X} . Это следует из леммы §1 главы IV, т.к. по этой лемме линейная комбинация решений системы линейных однородных алгебраических уравнений также является решением этой системы.

Пример 5. Пусть \mathcal{X} - линейное пространство над полем \mathbf{K} , $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ - базис этого пространства, $A \in M_m(\mathbf{R})$. Обозначим через P множество всех векторов этого пространства, координатные столбцы которых относительно базиса e являются решениями системы линейных однородных алгебраических уравнений $AX = 0$, т.е. $P = \{\bar{x}, \bar{x} \in \mathcal{X} : A[\bar{x}]_e = 0\}$. Подмножество P является подпространством линейного пространства \mathcal{X} . Докажите это утверждение. В этом случае говорят, что система линейных однородных алгебраических уравнений $AX = 0$ задает подпространство P (в базисе e).

Замечание. Подпространства линейного пространства можно задавать разными способами, используя особенности этих пространств. Примеры 2 и 5 дают два универсальных способа задания подпространства в любом линейном пространстве.

Теорема 2. Размерность любого подпространства конечномерного линейного пространства не превосходит размерности этого пространства, т.е. если P является подпространством линейного пространства \mathcal{X} , то $\dim P \leq \dim \mathcal{X}$.

Доказательство. Пусть $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ - базис \mathcal{X} , т.е. $\dim \mathcal{X} = n$; $y = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_k)$ - базис P , т.е.

$\dim P = k$. Пусть $k > n$. Любой вектор \bar{y}_i может быть разложен по базису e , т.к. e - базис \mathcal{X} . Следовательно, $\bar{y}_i = \text{ЛК}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$, $1 \leq i \leq k$, причём число k линейных комбинаций больше числа n комбинируемых векторов. Следовательно, совокупность $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_k$ линейно зависима по теореме 6 §2, что противоречит тому, что это базис P . Таким образом, $k = \dim P \leq \dim \mathcal{X} = n$, и теорема доказана.

Теорема 3. Если размерность подпространства P конечномерного линейного пространства \mathcal{X} равна размерности этого пространства, то они равны, т.е. $P = \mathcal{X}$.

Доказательство. Пусть $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ - базис P , т.е. $P = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n \rangle$ и пусть $\dim \mathcal{X} = n$.

Тогда по следствию к теореме 3§3 $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ - базис \mathcal{X} . Следовательно, $P = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n \rangle = \mathcal{X}$.

Теорема 4. Базис любого подпространства P конечномерного линейного пространства \mathcal{X} можно дополнить до базиса этого пространства.

Доказательство. Пусть $v = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p)$ - базис подпространства P линейного пространства \mathcal{X} . По теореме 4§2 базис v можно дополнить до базиса пространства \mathcal{X} , т.к. v - линейно независимая совокупность. Теорема доказана.

Если $\dim \mathcal{X} > 1$, то пространство \mathcal{X} содержит бесчисленное множество различных подпространств, из которых можно конструировать новые подпространства. Приведём две такие конструкции.

Определение 2. Суммой подпространств P и Q линейного пространства \mathcal{X} над полем \mathbf{K}

будем называть совокупность всех векторов вида $\bar{p} + \bar{q}$, где $\bar{p} \in P, \bar{q} \in Q$.

Обозначать сумму подпространств P и Q будем так: $P + Q$.

Таким образом, $P + Q \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x}, \bar{x} \in \mathcal{X} : \bar{x} = \bar{p} + \bar{q}; \bar{p} \in P, \bar{q} \in Q\}$.

Аналогичным образом определяется сумма **конечного числа** подпространств P_1, P_2, \dots, P_m линейного пространства \mathcal{X} . Сумму подпространств P_1, P_2, \dots, P_m будем обозначать так:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_m \quad \text{или так:} \quad \sum_{i=1}^m P_i.$$

По определению: $\sum_{i=1}^m P_i \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x}, \bar{x} \in \mathcal{X} : \bar{x} = \sum_{i=1}^m \bar{p}_i, \bar{p}_i \in P_i, i = \overline{1, m}\}$.

Определение 3. Пересечением подпространств P и Q линейного пространства \mathcal{X} над полем \mathbf{K}

будем называть совокупность всех векторов этого пространства, принадлежащих как подпространству P , так и подпространству Q . Обозначать пересечение подпространств P и Q будем так: $P \cap Q$.

Таким образом, $P \cap Q \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x}, \bar{x} \in \mathcal{X} : \bar{x} \in P; \bar{x} \in Q\}$.

Аналогичным образом определяется пересечение **любого** множества подпространств P_i , где индекс i пробегает множество индексов I (конечное или бесконечное). Пересечение подпространств P_i , где $i \in I$, будем обозначать так:

$$\bigcap_{i \in I} P_i.$$

По определению: $\bigcap_{i \in I} P_i \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x}, \bar{x} \in \mathcal{X} : \bar{x} \in P_i, \forall i \in I\}$.

Теорема 5. Сумма **конечного** числа подпространств линейного пространства \mathcal{X} над полем \mathbf{K} является подпространством этого пространства.

Пересечение **любого множества** подпространств линейного пространства \mathcal{X} над полем \mathbf{K} является подпространством этого пространства.

Доказательство.

I. Пусть P_1, P_2, \dots, P_m - подпространства линейного пространства \mathcal{X} над полем \mathbf{K} .

Покажем, что

множество $P = \sum_{i=1}^m P_i$ замкнуто относительно операций сложения и умножения на

числа поля \mathbf{K} , которые

имеются в \mathcal{X} , т.е. покажем, что для множества P выполняются условия 1) и 2)

теоремы 1.

1) Пусть векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in P$. Из определения 2 следует, что для этих векторов справедливы

равенства: $\vec{x}_1 = \sum_{i=1}^m \vec{p}'_i, \vec{x}_2 = \sum_{i=1}^m \vec{p}''_i$, где $\vec{p}'_i, \vec{p}''_i \in P_i$ для $i = \overline{1, m}$. Подпространства P_i

замкнуты относительно операции сложения, т.е. из включений $\vec{p}'_i, \vec{p}''_i \in P_i$

следует, что $\vec{p}'_i + \vec{p}''_i \in P_i$

для всех $i = \overline{1, m}$. Отсюда следует, что $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \sum_{i=1}^m \vec{p}'_i + \sum_{i=1}^m \vec{p}''_i = \sum_{i=1}^m (\vec{p}'_i + \vec{p}''_i) \in P$.

2) Пусть число $\lambda \in \mathbf{K}$, $\vec{x}_1 = \sum_{i=1}^m \vec{p}'_i \in P$, где $\vec{p}'_i \in P_i$ для $i = \overline{1, m}$. Отсюда следует,

что $\lambda \cdot \vec{x}_1 = \sum_{i=1}^m (\lambda \cdot \vec{p}'_i) \in P$, т.к. P_i - подпространства \mathcal{X} и потому замкнуты

относительно операции

умножения на числа поля \mathbf{K} , т.е. из включения $\vec{p}'_i \in P_i$ следует, что $\lambda \cdot \vec{p}'_i \in P_i$ для

всех $i = \overline{1, m}$.

II. Пусть Q_i - подпространства линейного пространства \mathcal{X} над полем \mathbf{K} для всех $i \in I$. Покажем, что

множество $Q = \bigcap_{i \in I} Q_i$ замкнуто относительно операций сложения и умножения на

числа поля \mathbf{K} , которые

имеются в \mathcal{X} , т.е. покажем, что для множества Q выполняются условия 1) и 2)

теоремы 1.

1) Пусть векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in Q$. Из определения 3 следует, что для этих векторов

справедливы включения: $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in Q_i$ для всех $i \in I$. Подпространства Q_i - замкнуты

относительно операции сложения. Поэтому из включений $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in Q_i$ следует, что

$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in Q_i$ для всех $i \in I$.

2) Пусть число $\lambda \in \mathbf{K}$, $\vec{x}_1 \in Q$. Из определения 3 следует, что для этого вектора

справедливо включение

$\bar{x}_i \in Q_i$ для всех $i \in I$. Подпространства Q_i - замкнуты относительно операции умножения на числа поля \mathbf{K} , т.е. из включения $\bar{x}_i \in Q_i$ следует, что $\lambda \cdot \bar{x}_i \in Q_i$ для всех $i \in I$.

Теорема доказана.

Теорема 6. (Теорема Грассмана.)

Для любых подпространств P и Q конечномерного линейного пространства \mathcal{X} над полем \mathbf{K} справедливо равенство $\dim P + \dim Q = \dim(P + Q) + \dim(P \cap Q)$.

Доказательство. Введём обозначения:

$$p = \dim P; \quad q = \dim Q, \quad s = \dim(P + Q), \quad t = \dim(P \cap Q).$$

Мы хотим доказать, что $p + q = s + t$. Выберем базис подпространства $P \cap Q$:

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_t.$$

По теореме 4 этот базис можно дополнить до базиса подпространства P и до базиса подпространства Q , т.к. $P \cap Q$ является подпространством и P , и Q .

Пусть $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_t, \bar{u}_{t+1}, \dots, \bar{u}_p$ - базис P (1),

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_t, \bar{v}_{t+1}, \dots, \bar{v}_q - \text{базис } Q \quad (2).$$

I. Докажем, что совокупность векторов $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_t, \bar{u}_{t+1}, \dots, \bar{u}_p, \bar{v}_{t+1}, \dots, \bar{v}_q$ - базис $P + Q$ (3).

Тогда отсюда следует, что $s = p + q - t \Leftrightarrow p + q = s + t$.

Сначала докажем, что система (3) линейно независима. Для этого составим линейную комбинацию этих векторов и приравняем её к нулевому вектору:

$$\alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_t \bar{u}_t + \alpha_{t+1} \bar{u}_{t+1} + \dots + \alpha_p \bar{u}_p + \beta_{t+1} \bar{v}_{t+1} + \dots + \beta_q \bar{v}_q = \bar{0} \quad (4)$$

Первые p слагаемых перенесём направо. В результате получим:

$\beta_{t+1} \bar{v}_{t+1} + \dots + \beta_q \bar{v}_q = -\alpha_1 \bar{u}_1 - \dots - \alpha_p \bar{u}_p \in P \cap Q$, т.к. вектор в левой части равенства из подпространства Q , а вектор в правой части равенства из подпространства P . Следовательно, этот вектор можно разложить по базису $P \cap Q$. Таким образом, получаем:

$$\beta_{t+1} \bar{v}_{t+1} + \dots + \beta_q \bar{v}_q = -\beta_1 \bar{u}_1 - \dots - \beta_t \bar{u}_t, \text{ откуда следует равенство:}$$

$\beta_1 \bar{u}_1 + \dots + \beta_t \bar{u}_t + \beta_{t+1} \bar{v}_{t+1} + \dots + \beta_q \bar{v}_q = \bar{0}$. Следовательно, $\beta_1 = \dots = \beta_t = \beta_{t+1} = \dots = \beta_q = 0$, т.к. совокупность векторов (2) линейно независима как базис Q .

Тогда из равенства (4) следуют равенства $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$, т.к. совокупность векторов (1) линейно независима как базис P .

Таким образом, из равенства (4) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = \beta_{t+1} = \dots = \beta_q = 0$, т.е. совокупность векторов (3) линейно независима по определению 4§2.

II. Теперь докажем, что совокупность (3) является порождающей подпространства $P + Q$. По определению 2 любой вектор $\bar{z} \in P + Q$ может быть записан в виде $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$, где $\bar{x} \in P$, $\bar{y} \in Q$. Векторы \bar{x} и \bar{y} можно разложить по базисам (1) и (2) подпространств P и Q соответственно:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^p x_i \bar{u}_i, \text{ где } x_i \in \mathbf{K} \text{ для } i = \overline{1, p}; \quad \bar{y} = \sum_{j=1}^t y_j \bar{u}_j + \sum_{j=t+1}^q y_j \bar{v}_j, \text{ где } y_j \in \mathbf{K} \text{ для } j = \overline{1, q}.$$

Таким образом, любой вектор $\vec{z} \in P + Q$ может быть записан так:

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^p x_i \vec{u}_i + \sum_{i=1}^t y_i \vec{u}_i + \sum_{j=t+1}^q y_j \vec{v}_j = \sum_{i=1}^t (x_i + y_i) \vec{u}_i + \sum_{i=t+1}^p x_i \vec{u}_i + \sum_{j=t+1}^q y_j \vec{v}_j, \text{ т.е. совокупность (3)}$$

является порождающей подпространства $P + Q$.

Итак, совокупность (3) линейно независимая и порождающая для подпространства $P + Q$. Следовательно, по определению 3§3 это базис подпространства $P + Q$, и теорема 6 доказана.

§6. Прямая сумма подпространств.

Определение 1. Сумму двух подпространств P и Q линейного пространства \mathcal{X} будем называть **прямой**, если для любого вектора $\vec{z} \in P + Q$ его представление в виде $\vec{z} = \vec{p} + \vec{q}$, где $\vec{p} \in P$, $\vec{q} \in Q$, **однозначно**.

Обозначать прямую сумму подпространств P и Q будем так: $P \oplus Q$.

Аналогично определяется **прямая сумма конечного числа** подпространств P_1, P_2, \dots, P_m линейного пространства \mathcal{X} . Сумму подпространств $\sum_{i=1}^m P_i$ будем

называть **прямой**, если для любого вектора $\vec{z} \in \sum_{i=1}^m P_i$ его представление в виде

$$\vec{z} = \sum_{i=1}^m \vec{p}_i, \vec{p}_i \in P_i, i = \overline{1, m}, \text{ однозначно.}$$

Прямую сумму подпространств P_1, P_2, \dots, P_m будем обозначать так: $P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_m$ или так: $\bigoplus_{i=1}^m P_i$.

Определение 2. Если $\mathcal{X} = P \oplus Q$, то говорят, что пространство \mathcal{X} раскладывается в прямую сумму подпространств P и Q . В этом случае подпространство Q называют **прямым дополнением** подпространства P до пространства \mathcal{X} .

Разумеется, в этом случае подпространство P является прямым дополнением подпространства Q до пространства \mathcal{X} .

Определение 3. Пусть пространство \mathcal{X} раскладывается в прямую сумму подпространств P и Q , т.е.

$\mathcal{X} = P \oplus Q$. Тогда любой вектор $\vec{z} \in \mathcal{X}$ может быть единственным образом представлен в виде:

$\vec{z} = \vec{p} + \vec{q}$, где $\vec{p} \in P$, $\vec{q} \in Q$. В этом случае вектор \vec{p} называют **проекцией вектора \vec{z} на подпространство P параллельно подпространству Q** и обозначают так:

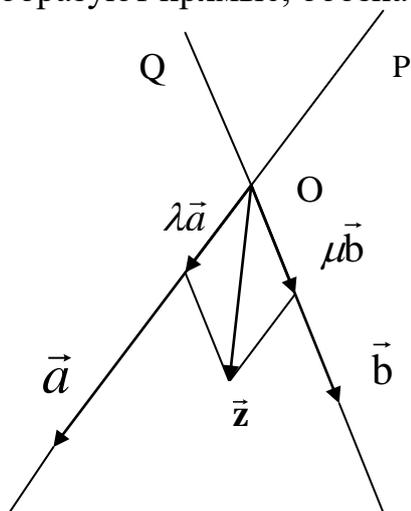
$$\vec{p} = pr_{P;Q} \vec{z}.$$

Пример 1. Пусть \mathcal{X} - пространство свободных векторов на плоскости, т.е. $\mathcal{X} = \mathcal{V}_2$, \vec{a} и \vec{b} - два неколлинеарные вектора этого пространства. Тогда (\vec{a}, \vec{b}) - базис \mathcal{X} . Пусть $P = \langle \vec{a} \rangle$, $Q = \langle \vec{b} \rangle$.

Любой вектор $\vec{z} \in \mathcal{V}_2$ может быть единственным образом разложен по этому базису: $\vec{z} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, где

$\lambda \vec{a} \in P$, $\mu \vec{b} \in Q$. Следовательно, $\mathcal{X} = P \oplus Q$, подпространство Q является прямым дополнением подпространства P до пространства \mathcal{X} , $\lambda \vec{a} = pr_{P \perp Q} \vec{z}$.

Приведённый ниже рисунок служит иллюстрацией к примеру 1. На этом рисунке все векторы, принадлежащие пространству \mathcal{V}_2 , имеют начало в точке O . Концы векторов, принадлежащих подпространствам P и Q соответственно, образуют прямые, обозначенные на рисунке теми же буквами.



Пример 2. Пусть $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ - базис конечномерного линейного пространства \mathcal{X} над полем \mathbf{K} .

Обозначим через P_i линейную оболочку, натянутую на вектор \vec{e}_i , т.е. $P_i = \langle \vec{e}_i \rangle$.

Любой вектор $\vec{z} \in \mathcal{X}$ может быть единственным образом разложен по этому

базису: $\vec{z} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i$, где $\lambda_i \vec{e}_i \in P_i$, $i = \overline{1, n}$.

Следовательно, $\mathcal{X} = \bigoplus_{i=1}^n P_i$.

Задача 1. Пусть $\mathcal{X} = M_n(\mathbf{K})$. Обозначим через P и Q множество всех симметричных и антисимметричных матриц пространства \mathcal{X} соответственно, т.е. $P = \{A, A \in \mathcal{X} : A = A^T\}$; $Q = \{A, A \in \mathcal{X} : A = -A^T\}$.

Докажите, что P и Q - подпространства \mathcal{X} , $\mathcal{X} = P \oplus Q$. Для произвольной матрицы $A \in \mathcal{X}$ найдите

$pr_{P \perp Q} A$.

Задача 2. Докажите, что для двух подпространств P и Q - конечномерного линейного пространства X одинаковой размерности существует общее прямое дополнение. Другими словами: если $\dim P = \dim Q$, то существует подпространство L линейного пространства X такое, что справедливы равенства $X = P \oplus L$ и $X = Q \oplus L$.

Теорема 1. Критерий прямой суммы двух подпространств.

Для того чтобы сумма подпространств P и Q линейного пространства X над полем K была прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий.

- I. Из равенства $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$, где $\vec{x} \in P, \vec{y} \in Q$ следует, что $\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$.
- II. $P \cap Q = \{\vec{0}\}$
- III. $\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q$.
- IV. Базис суммы $P + Q$ есть объединение базисов подпространств P и Q .

Доказательство. I. Необходимость. Пусть сумма $P + Q$ прямая и пусть $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$, где $\vec{x} \in P, \vec{y} \in Q$. Очевидно, справедливо равенство $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, причём $\vec{0} \in P, \vec{0} \in Q$. Представление любого вектора прямой суммы в виде суммы двух слагаемых, одно из которых из подпространства P , а другое – из подпространства Q , однозначно. Следовательно, $\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$.

Достаточность. Пусть выполнено условие I. Докажем, что в этом случае сумма $P + Q$ прямая. Пусть $\vec{z} \in P + Q$ и для этого вектора справедливы равенства: $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ и $\vec{z} = \vec{x}_1 + \vec{y}_1$, где $\vec{x}, \vec{x}_1 \in P, \vec{y}, \vec{y}_1 \in Q$. Вычтем из первого равенства второе. В результате получим:

$\vec{0} = (\vec{x} - \vec{x}_1) + (\vec{y} - \vec{y}_1)$, где $\vec{x} - \vec{x}_1 \in P, \vec{y} - \vec{y}_1 \in Q$, потому что P и Q замкнуты относительно операций сложения и умножения на числа поля K . Следовательно, по условию $\vec{x} - \vec{x}_1 = \vec{0}, \vec{y} - \vec{y}_1 = \vec{0}$ и $\vec{x} = \vec{x}_1, \vec{y} = \vec{y}_1$. Таким образом, для любого вектора $\vec{z} \in P + Q$ его представление в виде $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$, где $\vec{x} \in P, \vec{y} \in Q$, однозначно. Следовательно, сумма подпространств P и Q прямая.

II. Необходимость. Пусть сумма $P + Q$ прямая и $\vec{z} \in P \cap Q$. Очевидно, справедливо равенство $\vec{z} + (-\vec{z}) = \vec{0}$, причём $\vec{z} \in P, -\vec{z} \in Q$.

По первому критерию прямой суммы отсюда следует, что $\vec{z} = \vec{0}$.

Достаточность. Пусть $P \cap Q = \{\vec{0}\}$. Докажем, что выполнены условия предыдущего критерия. Пусть $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$, где $\vec{x} \in P, \vec{y} \in Q$. Тогда $\vec{x} = -\vec{y}$, причём $\vec{x} \in P, -\vec{y} \in Q$. Следовательно, $\vec{x} = -\vec{y} \in P \cap Q = \{\vec{0}\}$, т.е. $\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$, и по предыдущему критерию сумма $P + Q$ прямая.

III. Необходимость. Пусть сумма $P + Q$ прямая. Тогда по второму критерию $P \cap Q = \{\vec{0}\}$. Следовательно, по теореме 6§5

$\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q) = \dim P + \dim Q - 0 = \dim P + \dim Q$, т.к.

$\dim(P \cap Q) = \dim\{\vec{0}\} = 0$.

Достаточность. Пусть $\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q$. Тогда из той же теоремы 6§5 следует, что $\dim(P \cap Q) = 0$. Следовательно,

$P \cap Q = \{\vec{0}\}$, и по второму критерию сумма $P + Q$ прямая.

IV. Необходимость. Пусть сумма $P + Q$ прямая. Из предыдущего критерия следует, что $\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q$. Пусть $u = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ - базис подпространства P , $v = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q)$ - базис Q . Покажем, что совокупность $u \cup v = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q)$ - базис $P + Q$. Сначала покажем, что $u \cup v$ - порождающая для суммы $P + Q$.

Действительно, любой вектор $\vec{z} \in P + Q$ имеет вид

$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$, где $\vec{x} \in P$, $\vec{y} \in Q$. Векторы \vec{x} и \vec{y} можно разложить по базисам u и v подпространств P и Q соответственно:

$\vec{x} = \sum_{i=1}^p x_i \vec{u}_i$, $\vec{y} = \sum_{j=1}^q y_j \vec{v}_j$. Следовательно, $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^p x_i \vec{u}_i + \sum_{j=1}^q y_j \vec{v}_j$. Таким образом,

совокупность $u \cup v = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q)$ - порождающая для подпространства $P + Q$, причём количество векторов в этой порождающей равно размерности $P + Q$. По следствию к теореме 2§3 это базис $P + Q$.

Достаточность. Пусть совокупность $u \cup v = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q)$ - базис $P + Q$, где $u = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ - базис подпространства P , $v = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q)$ - базис Q . Тогда $\dim(P + Q) = p + q$ и, следовательно, $\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q$, потому что $\dim P = p$, $\dim Q = q$. Теорема доказана.

Приведём формулировку теоремы, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 2. Критерий прямой суммы конечного числа подпространств.

Для того чтобы сумма подпространств P_1, P_2, \dots, P_m линейного пространства X над полем K была прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий.

I. Из равенства $\sum_{i=1}^m \vec{p}_i = \vec{0}$, где $\vec{p}_i \in P_i$ для $i = \overline{1, m}$ следует, что $\vec{p}_i = \vec{0}$ для $i = \overline{1, m}$.

II. $P_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m P_j = \{\vec{0}\}$

III. $\dim \sum_{i=1}^m P_i = \sum_{i=1}^m \dim P_i$.

IV. Базис суммы $\sum_{i=1}^m P_i$ есть объединение базисов подпространств P_i для $i = \overline{1, m}$.

Доказательства первых двух утверждений совершенно аналогичны доказательствам утверждений I и II в теореме 1. Доказательство двух других нужно провести в следующем порядке. Сначала докажите методом математической индукции по числу подпространств необходимость утверждения III. Предварительно докажите, что если сумма $\sum_{i=1}^m P_i$ прямая, то и сумма $\sum_{i=1}^{m-1} P_i$, а также сумма подпространств $\sum_{i=1}^{m-1} P_i$ и P_m прямые. Затем докажите необходимость утверждения IV, используя необходимость утверждения III. Далее докажите достаточность утверждения IV и, наконец, достаточность утверждения III. Конечно, можно доказывать и по-другому.