

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

Е.А. Благовещенская

**Методические указания
по выполнению практических заданий
по дисциплине
«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.13)**

для специальности
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации
*«Безопасность автоматизированных систем на железнодорожном
транспорте»*

Форма обучения – очная

РАЗДЕЛ 5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Санкт-Петербург 2023

Практическое занятие 1. Линейные операции над векторами.

Пример. При каком значении k векторы $\bar{a}(-1; 4)$ и $\bar{b}(2; k)$ линейно зависимы?

Условие линейной зависимости: $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & k \end{vmatrix} = 0$. Отсюда $k = 8$.

Проверка $\bar{b} = \lambda \bar{a}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Пример. Доказать, что векторы $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ образуют базис и

разложить по этому базису вектор $\bar{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Условие линейной независимости: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Представление вектора \bar{d} суммой $\alpha \bar{a} + \beta \bar{b}$:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta \\ 4\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1\alpha + 2\beta \\ 3\alpha + 4\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Решение системы уравнений $\begin{cases} 1\alpha + 2\beta = 5; \\ 3\alpha + 4\beta = 11 \end{cases}$ имеет вид $\begin{cases} \alpha = 1; \\ \beta = 2. \end{cases}$

Разложение вектора \bar{d} по векторам базиса \bar{a} , \bar{b} : $\bar{d} = 1 \cdot \bar{a} + 2 \cdot \bar{b}$.

Пример. Доказать, что при $n = 2$ любой вектор \bar{d} может быть единственным образом разложен по векторам базиса \bar{a} , \bar{b} .

Условие линейной независимости: $\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \neq 0$.

Разложение по векторам базиса: $\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$.

Крамеровская система линейных уравнений $\begin{cases} d_x = \alpha a_x + \beta b_x; \\ d_y = \alpha a_y + \beta b_y \end{cases}$

(относительно неизвестных α , β) имеет единственное решение, т.к.

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пример. Доказать, что при $n = 2$ любые три вектора $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ линейно зависимы.

Если \bar{a}_1, \bar{a}_2 линейно зависимы, то в равенстве $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 = 0$ один из коэффициентов, например α_1 , отличен от нуля. Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ линейно зависимы, т.к. в равенстве $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \alpha_3\bar{a}_3 = 0$ присутствует отличный от нуля коэффициент α_1 .

Если \bar{a}_1, \bar{a}_2 линейно независимы, то они образуют базис и $\bar{a}_3 = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2$. Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ линейно зависимы, т.к. в равенстве $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + (-1)\bar{a}_3 = 0$ присутствует отличный от нуля коэффициент.

Пример. При каком значении A векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ A \end{pmatrix}$ линейно

зависимы. Найти эту зависимость.

Условие линейной зависимости: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & A \end{vmatrix} = 0$. Отсюда $A = -1$.

Векторное уравнение $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ имеет ненулевые

решения, например, $\alpha_1 = -1; \alpha_2 = 1; \alpha_3 = 1$.

Линейная зависимость векторов: $(-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пример. Доказать, что векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют базис и

разложить по этому базису вектор $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Признак линейной независимости: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Представление вектора $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ суммой: $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Решение системы уравнений $\begin{cases} 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 3; \\ 1 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = 3; \\ 0 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 2 \end{cases}$ имеет вид $\begin{cases} \alpha_1 = 2; \\ \alpha_2 = 1; \\ \alpha_3 = 1. \end{cases}$

Разложение вектора: $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Практическое занятие 2. Координаты вектора относительно базиса.

Пример. Доказать, что разность векторов $\vec{b} - \vec{a}$ равна диагонали параллелограмма (рис. 3.15).

Обозначим диагональ параллелограмма \vec{x} .

$$\vec{a} + \vec{x} = \vec{b};$$

$$\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Замечание. Вторая диагональ равна $\vec{a} + \vec{b}$.

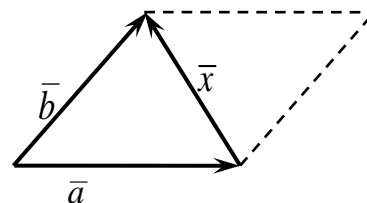


Рис. 3.15

Пример. Найти отношение длин диагоналей параллелограмма

(рис. 3.16), построенного на векторах $\vec{a} = (3; 5; -2)$ и $\vec{b} = (-2; 3; -3)$.

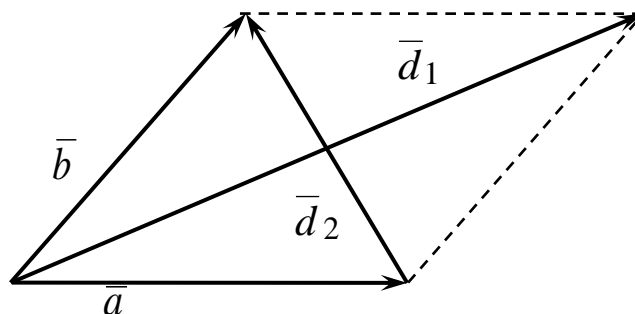


Рис. 3.16

$$\bar{d}_1 = \bar{a} + \bar{b} = (1; 8; -5), \quad \bar{d}_2 = \bar{b} - \bar{a} = (-5; -2; -1).$$

Отношение длин диагоналей: $\frac{|\bar{d}_1|}{|\bar{d}_2|} = \frac{\sqrt{1+64+25}}{\sqrt{25+4+1}} = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{3}}{1}.$

Пример. Найти координаты $x_M; y_M$ точки M (рис. 3.16), делящей отрезок

AB в отношении $\frac{AM}{BM} = \lambda$, если $A(1; 4), B(4; -2), \lambda = 2$.

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \lambda \cdot \overline{MB} =$$

$$= \overline{OA} + \lambda \cdot (\overline{OB} - \overline{OM}),$$

$$(1 + \lambda) \cdot \overline{OM} = \overline{OA} + \lambda \cdot \overline{OB}.$$

$$\begin{cases} (1 + \lambda) \cdot x_M = x_A + \lambda \cdot x_B; \\ (1 + \lambda) \cdot y_M = y_A + \lambda \cdot y_B; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 + 2) \cdot x_M = 1 + 2 \cdot 4; \\ (1 + 2) \cdot y_M = 4 + 2 \cdot (-2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_M = 3; \\ y_M = 0. \end{cases}$$

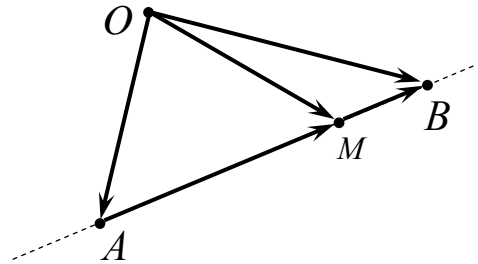


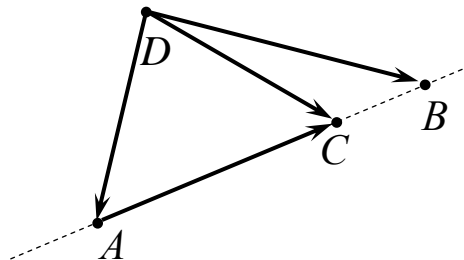
Рис. 3.16

Замечание. Координаты середины отрезка при $\lambda = \frac{AM}{BM} = 1$ можно

вычислить по формулам $\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}. \end{cases}$

Пример. В пространстве заданы четыре точки A, B, C и D , не лежащие на одной прямой, при этом точка C принадлежит отрезку AB . Доказать,

что $\overline{DC} = \frac{\mu}{\mu + \lambda} \overline{DA} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \overline{DB}$, если $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|} = \frac{\lambda}{\mu}.$



$$\overline{DC} = \overline{DA} + \overline{AC} = \overline{DA} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} (\overline{DB} - \overline{DA}) =$$

$$= \overline{DA} - \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \cdot \overline{DA} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \cdot \overline{DB} = \frac{\mu}{\mu + \lambda} \cdot \overline{DA} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \cdot \overline{DB}.$$

Пример. Найти направляющие косинусы вектора $\bar{a} = (3; 4)$.

Модуль вектора: $|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5;$

направляющие косинусы вектора: $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{3}{5}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} = \frac{4}{5}.$

Пример. Найти вектор \bar{a} , коллинеарный вектору \overline{AB} , направленный противоположно \overline{AB} , такой, что $|\bar{a}| = 6$, если $A(-1; 4; 7), B(1; 3; 5)$.

$$\overline{AB} = (1 - (-1))\bar{i} + (3 - 4)\bar{j} + (5 - 7)\bar{k} = 2\bar{i} - 1\bar{j} - 2\bar{k},$$

$$\bar{a} = -|\lambda| \cdot \overline{AB} = -2|\lambda|\bar{i} + |\lambda|\bar{j} + 2|\lambda|\bar{k},$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{4\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2} = 3|\lambda|, |\lambda| = \frac{6}{3} = 2,$$

$$\bar{a} = -4\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}.$$

Практическое занятие 3. Действия с векторами в декартовой системе.

Пример. Доказать, что разность векторов $\bar{b} - \bar{a}$ равна диагонали параллелограмма (рис. 3.15).

Обозначим диагональ параллелограмма \bar{x} .

$$\bar{a} + \bar{x} = \bar{b};$$

$$\bar{x} = \bar{b} - \bar{a}.$$

Замечание. Вторая диагональ равна $\bar{a} + \bar{b}$.

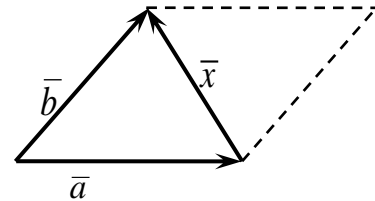


Рис. 3.15

Пример. Найти отношение длин диагоналей параллелограмма

(рис. 3.16), построенного на векторах $\bar{a} = (3; 5; -2)$ и $\bar{b} = (-2; 3; -3)$.

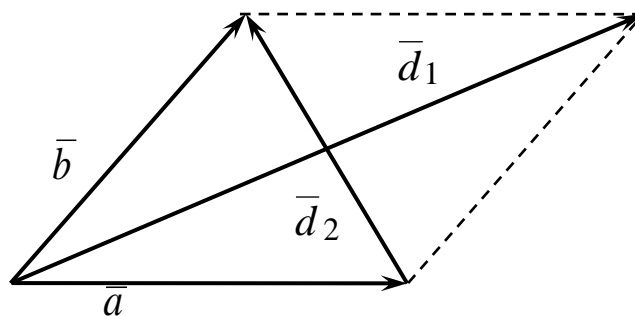


Рис. 3.16

$$\bar{d}_1 = \bar{a} + \bar{b} = (1; 8; -5), \quad \bar{d}_2 = \bar{b} - \bar{a} = (-5; -2; -1).$$

Отношение длин диагоналей: $\frac{|\bar{d}_1|}{|\bar{d}_2|} = \frac{\sqrt{1+64+25}}{\sqrt{25+4+1}} = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{3}}{1}.$

Пример. Найти координаты $x_M; y_M$ точки M (рис. 3.16), делящей отрезок

AB в отношении $\frac{AM}{BM} = \lambda$, если $A(1; 4), B(4; -2), \lambda = 2$.

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \lambda \cdot \overline{MB} =$$

$$= \overline{OA} + \lambda \cdot (\overline{OB} - \overline{OM}),$$

$$(1 + \lambda) \cdot \overline{OM} = \overline{OA} + \lambda \cdot \overline{OB}.$$

$$\begin{cases} (1 + \lambda) \cdot x_M = x_A + \lambda \cdot x_B; \\ (1 + \lambda) \cdot y_M = y_A + \lambda \cdot y_B; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 + 2) \cdot x_M = 1 + 2 \cdot 4; \\ (1 + 2) \cdot y_M = 4 + 2 \cdot (-2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_M = 3; \\ y_M = 0. \end{cases}$$

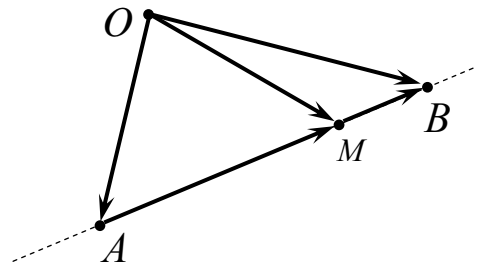


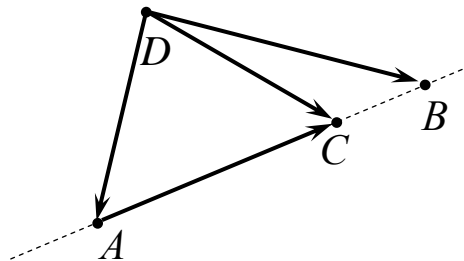
Рис. 3.16

Замечание. Координаты середины отрезка при $\lambda = \frac{AM}{BM} = 1$ можно

вычислить по формулам
$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}. \end{cases}$$

Пример. В пространстве заданы четыре точки A, B, C и D , не лежащие на одной прямой, при этом точка C принадлежит отрезку AB . Доказать,

что $\overline{DC} = \frac{\mu}{\mu + \lambda} \overline{DA} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \overline{DB}$, если $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|} = \frac{\lambda}{\mu}.$



$$\overline{DC} = \overline{DA} + \overline{AC} = \overline{DA} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} (\overline{DB} - \overline{DA}) =$$

$$= \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \cdot \overline{DA} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \cdot \overline{DB} = \frac{\mu}{\mu + \lambda} \cdot \overline{DA} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \cdot \overline{DB}.$$

Пример. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (3; 4)$.

Модуль вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5;$

направляющие косинусы вектора: $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{3}{5}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{4}{5}.$

Пример. Найти вектор \vec{a} , коллинеарный вектору \overline{AB} , направленный противоположно \overline{AB} , такой, что $|\vec{a}| = 6$, если $A(-1; 4; 7), B(1; 3; 5)$.

$$\overline{AB} = (1 - (-1))\vec{i} + (3 - 4)\vec{j} + (5 - 7)\vec{k} = 2\vec{i} - 1\vec{j} - 2\vec{k},$$

$$\vec{a} = -|\lambda| \cdot \overline{AB} = -2|\lambda|\vec{i} + |\lambda|\vec{j} + 2|\lambda|\vec{k},$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2} = 3|\lambda|, \quad |\lambda| = \frac{6}{3} = 2,$$

$$\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Практическое занятие 4. Вычисление скалярного произведения.

Пример. Вычислить скалярное произведение.

$$(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) \cdot (-5\vec{i} + \vec{k}) = (2 \cdot (-5) + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1) = -6.$$

Пример. Найти значение параметра k , при котором векторы $\vec{a} = (4; 2k; -1)$ и $\vec{b} = (-1; 1; 4)$ ортогональны.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ или } 4(-1) + 2k(-1) + (-1) \cdot 4 = 0, \text{ откуда } k = -4.$$

Пример. Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , если $|\vec{a}| = 0,5; |\vec{b}| = 8;$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{2}.$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2\sqrt{2}}{0,5 \cdot 8} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ следовательно, } \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Пример. Найти косинус угла между векторами $\vec{a} = (2; 1; -2),$
 $\vec{b} = (-4; 3; 0)$ и проекцию вектора \vec{a} на направление вектора \vec{b} .

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3; \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2} = 5;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(-4) + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 = -5;$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-5}{3 \cdot 5} = -\frac{1}{3}; \quad \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-5}{5} = -1.$$

Пример. Доказать теорему косинусов ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$).

В треугольнике ABC обозначим $\overline{AB} = \vec{c}, \overline{CB} = \vec{a}, \overline{CA} = \vec{b},$

тогда $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. Отсюда $\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c})$. Раскрывая скобки, получим $a^2 = b^2 + c^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c}$ или $a^2 = b^2 + c^2 + 2|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos(\pi - A)$.

Тогда $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

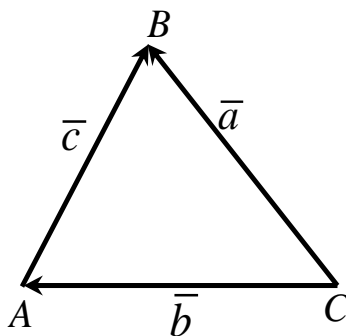


Рис. 3.18

Пример. На тело действует сила величиной 4 Н, линия действия которой составляет угол $\varphi = -60^\circ$ с горизонтальной осью. Найти проекции силы \vec{F} на оси Ox и Oy .

Проекция силы \vec{F} на ось Ox : $F_x = F \cdot \cos \varphi = 4 \cdot \cos(-60^\circ) = 2 \text{ Н}$.

Проекция \vec{F} на ось Oy : $F_y = F \cdot \sin \varphi = 4 \cdot \sin(-60^\circ) = -2\sqrt{3} \text{ Н} \approx -3,4 \text{ Н}$.

Пример. Сила $F = 400 \text{ Н}$ направлена под углом $\varphi = 30^\circ$ к направлению движения объекта. Вычислить работу этой силы, если объект прошел расстояние $s = 5 \text{ м}$.

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \varphi = 400 \cdot 5 \cdot \cos 30^\circ = 1700 \text{ Дж.}$$

Пример. Под действием силы \vec{F} тело движется вверх по наклонной плоскости под углом $\varphi = 60^\circ$ к горизонту. Найти силу, действующую на тело, если при перемещении тела на 4 м по горизонтали его энергия увеличилась на 200 Дж.

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \varphi = F \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 200 \text{ Дж.}$$

$$F = \frac{200}{4 \cdot \cos 60^\circ} \text{ Н} = 100 \text{ Н.}$$

Практическое занятие 5. Решение основных задач аналитической геометрии на плоскости.

Пример. Найти длину и уравнение высоты PH треугольника FPR , где $F(-1; 5)$, $P(2; -5)$, $R(2; 6)$.

Уравнение прямой FR : $\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-5}{6-5}$ или $x - 3y + 16 = 0$.

$\overline{FR} = \bar{i} - 3\bar{j}$ – нормальный вектор прямой FR и направляющий вектор прямой PH .

Уравнение прямой PH : $\frac{x-2}{1} = \frac{y+5}{-3}$ или $3x + y - 1 = 0$.

Расстояние от точки $(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Расстояние от точки P до прямой FR :

$$|PH| = \frac{|1 \cdot 2 - 3 \cdot (-5) + 16|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{33}{\sqrt{10}} = 3,3\sqrt{10} \approx 10,44.$$

Практическое занятие 6. Различные уравнения прямой линии на плоскости.

Пример. Записать различные уравнения прямой L , изображенной на рисунке 4.

Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{(-2)} + \frac{y}{1} = 1$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки: $\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-1}{0-1}$.

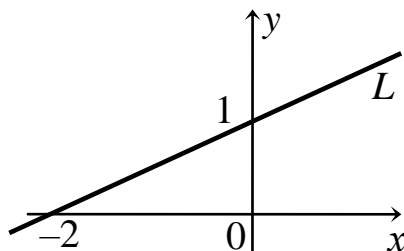


Рис. 4

Направляющий вектор прямой: $\overline{R} = (l; m) = (-2 - 0; 0 - 1) = (-2; -1)$;

каноническое уравнение прямой: $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-0}{-1}$.

Общее уравнение прямой: $x - 2y + 2 = 0$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = 0,5x + 1$.

Пример. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(0; 0)$ и $(-2; 1)$.

Угловой коэффициент прямой: $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1 - 0}{-2 - 0} = -\frac{1}{2}$.

Пример. Записать общее уравнение прямой, проходящей через точки $A(4; 1)$, $B(5; 3)$, найти отрезки a и b , отсекаемые этой прямой на осях, угловой коэффициент прямой и тангенс угла между ней и прямой $3x - y - 3 = 0$, координаты точки пересечения M^* этих прямых.

Уравнение прямой L , проходящей через точки A и B : $\frac{x-4}{5-4} = \frac{y-1}{3-1}$;

Общее уравнение прямой L : $2x - y - 7 = 0$.

Уравнение прямой L в отрезках: $\frac{x}{3,5} + \frac{y}{-7} = 1$; $a = 3,5$; $b = -7$.

Уравнение L с угловым коэффициентом: $y = 2x - 7$; $k = \operatorname{tg} \alpha = 2$.

Угловой коэффициент прямой $3x - y - 3 = 0$: $k_1 = 3$.

Практическое занятие 7. Взаимное расположение прямых на плоскости.

Тангенс угла φ с между прямыми $3x - y - 3 = 0$ и $2x - y - 7 = 0$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_1 - k}{1 + k_1 k} = \frac{3 - 2}{1 + 3 \cdot 2} = \frac{1}{7}.$$

Точка пересечения прямых: $\begin{cases} 2x^* - y^* - 7 = 0; \\ 3x^* - y^* - 3 = 0. \end{cases}$. Отсюда $x^* = -4$; $y^* = -15$.

Пример. Записать уравнения прямых, проходящих через точку $(3; 2)$, параллельно и перпендикулярно прямой $y = 0,5x + 1$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k , проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$: $y = k(x - x_0) + y_0$.

Угловой коэффициент прямой $y = 0,5x + 1$: $k = 0,5$.

Условие параллельности прямых: $k_1 = k = 0,5$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k_1 : $y = 0,5(x - 3) + 2$ или $y = 0,5x + 0,5$.

Условие перпендикулярности прямых: $k_2 = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{0,5} = -2$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k_2 : $y = -2(x - 3) + 2$ или $y = -2x + 8$.

Практическое занятие 8. Различные уравнения плоскости в пространстве.

Пример. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки $(1; 0; 0)$, $(0; 2; 0)$ и $(0; 0; 3)$.

Рассмотрим два способа.

$$1) \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0-1 & 2-0 & 0-0 \\ 0-1 & 0-0 & 3-0 \end{vmatrix} = 0 \text{ — уравнение плоскости, проходящей через три}$$

точки. Раскрывая определитель, находим

$6x + 3y + 2z - 6 = 0$ — общее уравнение плоскости.

2) Плоскость отсекает на осях (рис. 12) отрезки $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

Уравнение плоскости в отрезках: $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

Пример. Найти косинус угла между плоскостями $x - 4y - 8z - 3 = 0$ и $2x - y - 2z + 4 = 0$.

$$\bar{N}_1 = (1; -4; -8); \quad \bar{N}_2 = (2; -1; -2);$$

$$\cos \varphi = \frac{|\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2|}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|} = \frac{|1 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) + (-8) \cdot (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-8)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{22}{27}.$$

Пример. Определить положение плоскости $3x + 4z - 5 = 0$ в пространстве.

В уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ коэффициенты $B = 0$ и $D \neq 0$.

Плоскость $3x + 4z - 5 = 0$ параллельна оси Oy .

Пример. Определить положение плоскости $2y + 5 = 0$ в пространстве.

В уравнении $2y + 5 = 0$ коэффициенты $A = 0$, $C = 0$, $B \neq 0$, $D \neq 0$.

Плоскость $2y + 5 = 0$ перпендикулярна оси Ox и параллельна плоскости Oxz .

Пример. Вывести уравнение плоскости, проходящей через три точки

$M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

Произвольная точка $M(x; y; z)$ лежит в одной плоскости с точками M_0 , M_1 , M_2 , если векторы

$$\begin{aligned}\overline{M_0M} &= (x - x_0; y - y_0; z - z_0), \\ \overline{M_0M_1} &= (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0), \\ \overline{M_0M_2} &= (x_2 - x_0; y_2 - y_0; z_2 - z_0)\end{aligned}$$

компланарны и их смешанное произведение равно нулю.

$$\text{Уравнение плоскости: } \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Замечание. Через три точки пространства $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость.

Практическое занятие 9. Различные уравнения прямой в пространстве.

Пример. Записать уравнения прямой с направляющим вектором: $\bar{R}(1; 2; 3)$, проходящей через точку $B(4; 5; 6)$.

Канонические уравнения прямой: $\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-6}{3}$.

Пример. Записать уравнения прямой, перпендикулярной плоскости $2x + 3y - z - 5 = 0$ и проходящей через точку $B(2; 0; -1)$.

Нормальный вектор \bar{N} плоскости является направляющим вектором \bar{R} прямой: $\bar{R} = \bar{N} = (2; 3; -1)$.

Канонические уравнения прямой: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-0}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

Пример. Записать уравнение плоскости, перпендикулярной прямой

$\frac{x-2}{2} = \frac{y-0}{3} = \frac{z+1}{-1}$ и проходящей через точку $B(2; 0; -1)$.

Направляющий вектор прямой \bar{R} является нормальным вектором плоскости $\bar{N}: \bar{N} = \bar{R} = (2; 3; -1)$.

уравнение плоскости: $2(x-2) + 3y - (z+1) = 0$.

Пример. Записать уравнения прямой, образованной пересечением плоскостей $5x + 3y + 4z - 8 = 0$ и $2x + y - 1 = 0$.

Нормальные векторы плоскостей: $\bar{N}_1(5; 4; 3)$ и $\bar{N}_2(2; 1; 0)$.

Направляющий вектор прямой:

$$\bar{R} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\bar{i} + 6\bar{j} - 3\bar{k} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решая совместно уравнения плоскостей, фиксируя, например, $x = 0$, находим точку прямой: $x = 0, y = 1, z = 5/4 = 1,25$.

Канонические уравнения прямой: $\frac{x-0}{4} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-1,25}{-3}$.

Пример. Найти координаты точки M^* пересечения прямой $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{8}$ и плоскости $x + 2y - 2z - 9 = 0$ и синус угла α между прямой и плоскостью (рис. 15).

Параметрические уравнения прямой: $x = 1 - 4t, y = -2 + t, z = 3 + 8t$.

После подстановки x, y, z в уравнение плоскости: $-18t - 18 = 0; t = -1$.

Координаты точки M^* пересечения прямой и плоскости:

$$x^* = 1 - 4t \Big|_{t=-1} = 1 - 4(-1) = 5, \quad y^* = -2 + t = -2 - 1 = -3, \quad z^* = 3 + 8(-1) = -5.$$

Нормальный вектор плоскости $x + 2y - 2z - 9 = 0$: $\bar{N}(1; 2; -2)$;

$$\sin \alpha = \frac{|\bar{R} \cdot \bar{N}|}{|\bar{R}| \cdot |\bar{N}|} = \frac{|-4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 8 \cdot (-2)|}{\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 8^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}.$$

Пример. Определить положение прямой в пространстве, если она проходит через две точки с равными ненулевыми аппликатами.

$z_0 \neq 0, n = 0$ в уравнении прямой $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$.

Направляющий вектор $(l; m; 0)$ перпендикулярен орту $\bar{k}(0; 0; 1)$.

Прямая перпендикулярна оси Oz и параллельна плоскости xOy .

Практическое занятие 10. Уравнения кривых второго порядка.

Практическое занятие 11. Уравнения поверхностей второго порядка.

Линии второго порядка на плоскости

Общее уравнение линии второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Эллипс – множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек плоскости (фокусов) F_1 и F_2 постоянна (рис. 4.8): $r_1 + r_2 = 2a$.

Каноническое уравнение эллипса в прямоугольной декартовой системе координат, ось абсцисс которой проходит через точки F_1, F_2 , ось ординат – через середину отрезка $F_1 F_2$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$,

$2c$ – расстояние между фокусами,

a – большая полуось эллипса,

b – малая полуось эллипса.

Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$.

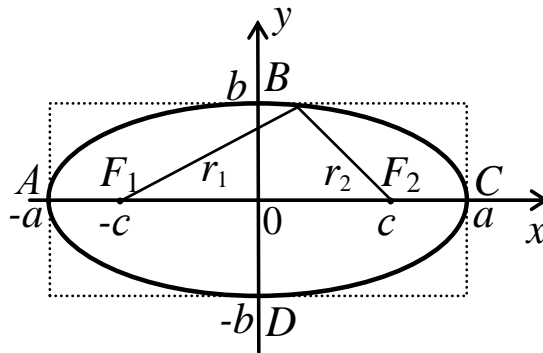


Рис. 4.8

Окружность – множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра). Частный случай эллипса ($c = 0$, $\varepsilon = 0$), соответствующий совмещению фокусов.

Уравнение окружности: $x^2 + y^2 = r^2$ или $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$,

где r – радиус, x_0, y_0 – координаты центра окружности.

Гипербола – множество точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек плоскости (фокусов) F_1 и F_2 постоянна (рис. 4.9): $|r_1 - r_2| = 2a$.

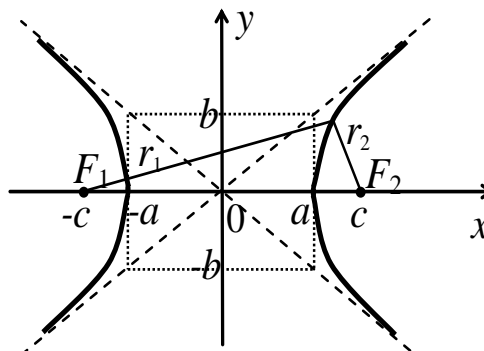


Рис. 4.9

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$,

$2c$ – расстояние между фокусами;

прямая, проходящая через точки $F_1 F_2$ – действительная ось гиперболы;

прямая Oy – мнимая ось гиперболы.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$.

При $a = b$ гипербола называется равносторонней. При повороте системы координат на 45° уравнение равносторонней гиперболы имеет

вид $y = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{x}$.

Парабола – множество точек плоскости, равноудаленных ($d = r$) от данной точки плоскости (фокуса) F и данной прямой l (директрисы)

$x = -\frac{p}{2}$ (рис. 4.10).

Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$, ($p > 0$).

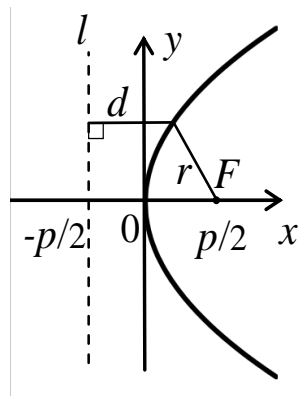


Рис. 4.10

Пример. Найти радиус R окружности $x^2 + y^2 + 8x + 12 = 0$.

$x^2 + y^2 + 8x + 12 = (x+4)^2 - 16 + y^2 + 12$; $(x+4)^2 + y^2 = 4$; $R = 2$.

Пример. Найти эксцентриситет эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

$$a^2 = 25, b^2 = 9, c^2 = a^2 - b^2 = 16; \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}.$$

Пример. Найти расстояние между фокусами гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$.

Каноническое уравнение гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$;

$$a^2 = 9, b^2 = 16, c^2 = a^2 + b^2 = 25.$$

Расстояние между фокусами: $2c = 10$.

Пример. Определить тип линии $r = \frac{1}{1 + \sin \varphi}$.

Переход к декартовой системе координат: $r = \frac{1}{1 + \sin \varphi}$; $r = \frac{1}{1 + \frac{y}{r}}$;

$$r = \frac{r}{r + y}; r + y = 1; r^2 = (1 - y)^2; x^2 + y^2 = y^2 - 2y + 1; y = \frac{1}{2}(1 - x^2).$$

$r = \frac{1}{1 + \sin \varphi}$ – парабола (рис. 4.11).

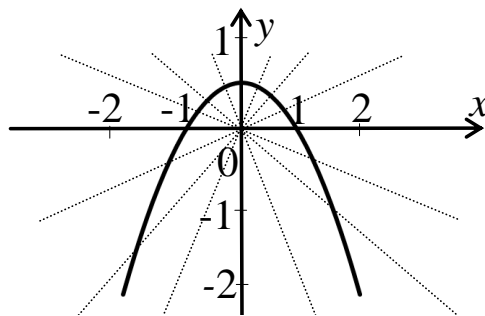


Рис. 4.11

ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ

1. Найдите наименьшее значение параметра k , при котором расстояние между точками $A(1; 2)$ и $B(k; -2)$ равно 5.

Ответ: -2 .

2. Докажите, что треугольник, заданный вершинами $(5; -6)$, $(-3; 9)$, $(12; 1)$, является равнобедренным.

3. Найдите координаты точки M , если отрезок AB в три раза больше отрезка AM и известны координаты точек $A(1; 2)$ и $B(4; -4)$.

Ответ: (2; 0)

4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки (1; 5) и (3; 9).

Ответ: $y = 2x + 3$.

5. При каком значении параметра k прямая $y = kx - 2$ проходит через точку пересечения прямых $2x + y - 5 = 0$ и $3x - 2y + 3 = 0$?

Ответ: 5.

6. Найдите угол A треугольника ABC , заданного вершинами $A(0; 3)$, $B(3; 7)$, $C(4; 0)$.

Ответ: 90° .

7. Найдите длину высоты AH треугольника, заданного координатами вершин $A(2; 3)$, $B(5; 4)$, $C(-8; 6)$.

Ответ: 1,44.

8. Найдите декартовы координаты точки A , полярные координаты которой $(4; \pi/6)$.

Ответ: $x = 2\sqrt{3}$, $y = 2$.

9. Определите тип линии второго порядка, заданной уравнением $4x^2 + 5y^2 + 20x - 30y + 10 = 0$.

Ответ: эллипс $\frac{(x + 2,5)^2}{15} + \frac{(y - 3)^2}{12} = 1$.

10. Составьте уравнение окружности с центром в точке (1; 2), проходящей через точку (-3; -1).

Ответ: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$.

11. Составьте каноническое уравнение гиперболы, которая проходит через точки (-2; 0) и (10/3; 4).

Ответ: $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$.

12. Определите параметр p параболы $y^2 = 2px$, если она проходит через точку (2; 4).

Ответ: 4.

13. Исследуйте взаимное расположение эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ и прямой
 $y = x + 1$.

Ответ: прямая пересекает эллипс в двух точках.

14. Определите эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Ответ: $5/3$.

15. Найдите малую полуось эллипса $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, если эксцентриситет эллипса равен $0,8$.

Ответ: $4/3$.

16. Составьте уравнение плоскости, отсекающей отрезки 3 ; 2 и 1 на осях координат $0x$, $0y$, $0z$.

Ответ: $2x + 3y + 6z - 6 = 0$.

17. Установите значение A , при котором плоскость $2x + Ay - z - 3 = 0$ содержит точку $(1; 2; 3)$.

Ответ: 2 .

18. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0; 1; 1)$; $B(2; 0; 0)$; $C(1; 0; 3)$.

Ответ: $-3x + 2y - z + 6 = 0$.

19. Докажите, что уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно векторам $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$

может быть записано
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0.$$

20. Докажите, что точки $A(3; -3; 5)$, $B(-1; -1; -1)$, $C(1; -2; 2)$ лежат на одной прямой.

21. Найдите длину медианы AD треугольника ABC , заданного координатами вершин $A(-1; -3; 4)$, $B(2; -4; -1)$, $C(4; 6; 5)$.

Ответ: 6.

22. Найдите длину средней линии трапеции, заданной координатами вершин $A(2; 0; -1)$, $B(5; -1; 1)$, $C(-2; 1; 3)$, $D(-8; 3; -1)$.

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt{17}$.

23. Найдите координаты точки C , принадлежащей отрезку AB , если заданы координаты $A(7; 3; 5)$, $B(2; -2; 0)$ и отношение $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$.

Ответ: $(4; 0; 2)$.

24. Найдите координаты вершины A треугольника ABC , если заданы координаты середин сторон CB , AC и AB : $(x_a; y_a; z_a)$, $(x_b; y_b; z_b)$, $(x_c; y_c; z_c)$ соответственно.

Ответ: $-x_a + x_b + x_c; -y_a + y_b + y_c; -z_a + z_b + z_c$.

25. Прямая в пространстве соединяет две точки с нулевыми абсциссами. Укажите плоскость, которой принадлежит эта прямая.

Ответ: плоскость yOz .

26. Найдите синус угла между прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{-8}$ и плоскостью

$$2x + y + 2z - 9 = 0.$$

Ответ: $10/27$.

27. Найдите координату z_0 точки $A(x_0; 2; z_0)$, принадлежащей прямой, перпендикулярной плоскости $3x + 2y - z + 5 = 0$ и проходящей через точку $B(2; 0; -1)$.

Ответ: -2 .

КОНТРОЛЬНЫЕ ТЕСТЫ

№	Задание	Ответ
1	Длина отрезка, отсекаемого прямой $2x + 3y - 6 = 0$ на оси Ox , равна	
2	Если $A(1; 2)$ и $B(4; -2)$, то длина отрезка AB , равна	
3	Угловым коэффициентом прямой, проходящей через точки $A(1; 1)$ и $B(-1; 2)$, равен	
	1) $-1/2$ 2) $1/2$ 3) 2 4) -2	
4	<div style="text-align: center;"> </div> <p>В порядке возрастания угловых коэффициентов укажите последовательность прямых, представленных на рисунке.</p>	
	1) f 2) h 3) g 4) u	
5	Если декартовы координаты точки $A(0; 4)$, то ее полярные координаты равны	
6	Установите соответствие между кривыми второго порядка и их уравнениями:	
	1) $3x^2 + y = 4$ А) окружность 2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ В) парабола 3) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ С) гипербола 4) $(x+6)^2 + (y-1)^2 = 16$ D) эллипс	

7	Установите соответствие уравнений кривых и их эксцентриситетов ε	
	<p>1) окружность А) $\varepsilon = 0$ 2) эллипс В) $\varepsilon = 1$ 3) парабола С) $\varepsilon > 1$ 4) гипербола D) $\varepsilon < 1$</p>	
8	Среди уравнений кривых укажите уравнение окружности.	
	<p>1) $x + (y - 1)^2 = 4$ 2) $x^2 - (y - 1)^2 = 4$ 3) $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ 4) $4x^2 + (y - 1)^2 = 4$</p>	
9	Координата x_0 точки $A(x_0; 2; 8)$, принадлежащей плоскости $5x + y + z + 5 = 0$, равна	
10	Нормальный вектор плоскости $4x + 3y + 2z + 1 = 0$ равен	
	1) (4; 3; 2) 2) (3; 2; 1) 3) (2; 3; 4) 4) (1; 2; 3)	
11	Уравнение плоскости с нормальным вектором: (6; 5; 4), проходящей через точку $B(3; 2; 1)$ имеет вид	
	<p>1) $\frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-4}{1}$ 2) $3(x-6) + 2(y-5) + 1(z-4) = 0$ 3) $\frac{x-3}{6} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{4}$ 4) $6(x-3) + 5(y-2) + 4(z-1) = 0$</p>	
12	Установите соответствие между уравнением плоскости и ее положением в пространстве	
	<p>1) $4 - 5x = 0$ А) плоскость yOz 2) $2 + 7y = 0$ В) параллельна плоскости yOz 3) $3y + 8z - 2 = 0$ С) параллельна плоскости xOz D) параллельна оси x</p>	
13	Направляющий вектор прямой $\frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-4}{1}$ равен	
	1) (6; 5; 4) 2) (3; 2; 1) 3) (4; 5; 6) 4) (1; 2; 3)	

14	Уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{R}(6; 5; 4)$, проходящей через точку $B(3; 2; 1)$ имеет вид 1) $\frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-4}{1}$ 2) $3(x-6) + 2(y-5) + 1(z-4) = 0$ 3) $\frac{x-3}{6} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{4}$ 4) $6(x-3) + 5(y-2) + 4(z-1) = 0$	
15	Прямая в пространстве проходит через две точки с равными ненулевыми абсциссами. Эта прямая не может пересекать 1) плоскость xOy 2) плоскость xOz 3) плоскость yOz 4) ось абсцисс	
16	Уравнение плоскости, перпендикулярной прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{-1}$ и проходящей через точку $(0; 0; 0)$ имеет вид 1) $2x + z = 0$ 2) $2x + z - 2 = 0$ 3) $2x + y = 0$ 4) $2y + z + 1 = 0$	

Практическое занятие 12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Пример. Найти собственные числа матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение имеет вид $\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Раскрывая определитель:

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 15\lambda + 54) = (\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 9) = 0.$$

Собственные числа матрицы \mathbf{A} : $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$.

Пример. Найти собственные столбцы (векторы) матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Сделать проверку.

Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$.

Собственные числа матрицы \mathbf{A} : $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$.

При $\lambda_1 = 2$ однородная система принимает вид:

$$\begin{cases} (5-2)x_1 - 3x_2 = 0 \\ 1x_1 + (1-2)x_2 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Одно из ненулевых решений системы: $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$.

Собственный вектор матрицы \mathbf{A} для $\lambda_1 = 2$: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Проверка. $\mathbf{A} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\lambda \mathbf{X} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = 4$ однородная система принимает вид:

$$\begin{cases} (5-4)x_1 - 3x_2 = 0 \\ 1x_1 + (1-4)x_2 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1x_1 - 3x_2 = 0 \\ 1x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Одно из ненулевых решений системы: $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$.

Собственный вектор матрицы \mathbf{A} для $\lambda_2 = 4$: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Проверка. $\mathbf{A} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\lambda \mathbf{X} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Пример. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Собственные числа матрицы \mathbf{A} : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

При $\lambda_1 = 1$ однородная система принимает вид:

$$\begin{cases} 0x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 0x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \\ 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Одно из ненулевых решений системы: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$.

Собственный вектор матрицы \mathbf{A} для $\lambda_1 = 1$: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = 2$ однородная система принимает вид:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0; \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Одно из ненулевых решений системы: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$.

Собственный вектор матрицы \mathbf{A} для $\lambda_2 = 2$: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_3 = 3$ однородная система принимает вид:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 0x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases}$$

Одно из ненулевых решений системы: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Собственный вектор матрицы \mathbf{A} для $\lambda_3 = 3$: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.