ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

Е.А. Благовещенская

Методические указания по выполнению практических заданий

по дисциплине

«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.13)

для специальности
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации
«Информационная безопасность автоматизированных систем на транспорте»

Форма обучения – очная

РАЗДЕЛ 4. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Санкт-Петербург 2023

Практические занятия 9-10. Действия с матрицами.

Матрицы. Действия над матрицами

Пример. Найти $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, 3**A**, **A** + **B**, если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$3\mathbf{A} = 3\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 & -1+1 \\ 4+4 & 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Пример. Можно ли вычислить **A** · **B** и **B** · **A,** если

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$?

Операция **A** · **B** возможна, т.к. количество столбцов **A** совпадает с числом строк **B**, умножение **B** на **A** не определено.

Пример. Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-2)+0\cdot 4 & 1\cdot 1+0\cdot(-5) \\ 0\cdot(-2)+1\cdot 4 & 0\cdot 1+1\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Пример. Вычислить $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)\cdot 1+(-1)\cdot 4 & (-2)\cdot 2+(-1)\cdot 5 & (-2)\cdot 3+(-1)\cdot 6 \\ 0\cdot 1+7\cdot 4 & 0\cdot 2+7\cdot 5 & 0\cdot 3+7\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -12 \\ 28 & 35 & 42 \end{pmatrix}.$$

На рисунке 2.1 показан выбор сомножителей при вычислении элемента, расположенного во второй строке и третьем столбце (умножение «строка на столбец).

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 2 & 3\downarrow \\ & & & & + \\ & & 4 & 5 & 6\downarrow \\ \hline -2 & -1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 7 & \dots & \dots & 0*3+7*6 \end{array}$$

$\rightarrow \ + \rightarrow$

Рис. 2.1

Практические занятия 11-12. Вычисление определителей.

Пример. Вычислить определители.

$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ = 2 (–2) – (–5) 4 = – 4 + 20 = 16 (рис. 2.2).

$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix}$ = 4 · 5 · (–6) + (–1) · (–3) · 1 + 0 · 2 · 2 –

– 2 · 5 · 1 – (–3) · 2 · 4 – (–1) · 0 · (–6) = –103 (рис. 2.3).

Пример. Найти значение α, при котором определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & \alpha \end{vmatrix}$ равен 0.

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & \alpha \end{vmatrix}$ = $2\alpha - 6 = 0$; $\alpha = 3$.

Пример. Вычислить алгебраическое дополнение A_{21} определителя $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix}$.

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \left((-1) \cdot (-6) - 2 \cdot 2\right) = -8$$

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix}$ разложением по элементам второй строки.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -103.$$

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$ разложением по элементам первого столбца.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 4\cdot5\cdot(-6) = -120.$$

Замечание. Определитель называется треугольным, если все числа, расположенные выше (ниже) элементов главной диагонали a_{ii}, равны нулю. Треугольный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} b & 34 & 3 \\ 0 & 35 & 0 \\ 6 & 33 & a \end{vmatrix}$, если $\begin{vmatrix} a & 3 \\ 6 & b \end{vmatrix} = \frac{2}{7}$.

После разложения по второй строке получаем

$$\begin{vmatrix} b & 34 & 3 \\ 0 & 35 & 0 \\ 6 & 33 & a \end{vmatrix} = 35\begin{vmatrix} b & 3 \\ 6 & a \end{vmatrix} = 35\cdot\frac{2}{7} = 10.$$

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$.

После вынесения за знак определителя общих множителей первой строки, второй строки и второго столбца, получаем

$$\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 3\cdot2\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot2\cdot2\cdot\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 132.$$

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 13 \\ 1 & 11 & 0 \\ 3 & 1 & -8 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 13 \\ 1 & 11 & 0 \\ 3 & 1 & -8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 11 & 0 \\ -2 & 4 & 13 \\ 3 & 1 & -8 \end{vmatrix} = \left\langle \text{Строки 1, 2 переставлены местами.} \right\rangle$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 11 & 0 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -32 & -8 \end{vmatrix} = \left\langle \begin{array}{l} \text{Ко второй строке прибавлена первая,} \\ \text{умноженная на 2;} \\ \text{к третьей строке прибавлена первая,} \\ \text{умноженная на } (-3). \end{array} \right\rangle =$$

$$= -13 \cdot (-8) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 11 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \left\langle \begin{array}{l} \text{Общие множители второй и} \\ \text{третьей строк вынесены} \\ \text{за знак определителя.} \end{array} \right\rangle =$$

$$= 104 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 11 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \left\langle \begin{array}{l} \text{К третьей строке прибавлена вторая,} \\ \text{умноженная на } (-2). \end{array} \right\rangle =$$

$= 104\,(1 \cdot 2 \cdot (-1)) = -208.$

Пример. Доказать формулу $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$

Разложение определителя по элементам второго столбца, например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+2} a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) +$$

$$+(-1)^{2+2} a_{22}(a_{11} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31}) + (-1)^{3+2} a_{32}(a_{11} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{21}).$$

Раскрыв скобки, получим искомую формулу.

Пример. Разложить определитель $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 & -6 \end{vmatrix}$ по первой строке.

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -4 & -5 & -6 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & -5 & -6 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & -4 & -6 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Обратная матрица

Пример. Найти матрицу $\mathbf{A}^{-1}$, обратную матрице $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Сделать проверку.

det$\mathbf{A}$ = $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ = $4\cdot(-1) - (-2)\cdot 1 = -2 \neq 0$.

Алгебраические дополнения первой строки:

$A_{11} = (-1)^{1+1} a_{22} = (-1)^{1+1}(-1) = -1$; $A_{12} = (-1)^{1+2} a_{21} = (-1)^{2+1}\cdot 1 = -1$;

алгебраические дополнения второй строки:

$A_{21} = (-1)^{2+1} a_{12} = (-1)^{1+2}(-2) = 2$; $A_{22} = (-1)^{2+2} a_{11} (-1)^{2+2}(4) = 4$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Проверка. $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 4 + (-1) \cdot 1 & \frac{1}{2}(-2) + (-1)(-1) \\ \frac{1}{2} \cdot 4 + (-2) \cdot 1 & \frac{1}{2}(-2) + (-2)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -1+1 \\ 2-2 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$

Пример. Используя матричные операции, выразить z_1, z_2 через x_1, x_2 , если $\begin{cases} y_1 = 4z_1 - 2z_2; \\ y_2 = z_1 - z_2 \end{cases}$ и $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 4x_2; \\ y_2 = 3x_1 - x_2. \end{cases}$

Введем матрицы: $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Тогда $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{Z}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{X}$.

Умножая обе части матричного равенства $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{Z}$ на $\mathbf{A}^{-1}$, получаем $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Z}$; $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{Y} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{Z}$; $\mathbf{Z} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{Y}$.

После подстановки $\mathbf{Y} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{X}$: $\mathbf{Z} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{X}$.

Матрица $\mathbf{A}^{-1}$ получена в предыдущем примере.

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -1 \\ \dfrac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + 3x_2 \\ -5x_1 + 4x_2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} z_1 = -2x_1 + 3x_2; \\ z_2 = -5x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Проверка. Подстановка решения в первую систему приводит ко второй системе:

$$\begin{cases} y_1 = 4z_1 - 2z_2; \\ y_2 = z_1 - z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 4(-2x_1 + 3x_2) - 2(-5x_1 + 4x_2); \\ y_2 = (-2x_1 + 3x_2) - (-5x_1 + 4x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2x_1 + 4x_2; \\ y_2 = 3x_1 - x_2. \end{cases}$$

Пример. Доказать, что для матрицы второго порядка $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ обратная матрица имеет вид $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$.

Алгебраические дополнения первой строки:

$A_{11} = (-1)^{1+1}a_{22} = a_{22}$; $A_{12} = (-1)^{1+2}a_{21} = -a_{21}$;

алгебраические дополнения второй строки:

$A_{21} = (-1)^{2+1}a_{12} = -a_{12}$; $A_{22} = (-1)^{2+2}a_{11} = a_{11}$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Пример. Доказать, что решение уравнения $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ может быть записано в матричной форме $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ при условии существования обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$.

После умножения системы $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ на обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$:

$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Практические занятия 13-16. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = -1; \\ x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$ по формулам Крамера и сделать проверку.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 22 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{11}, \, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{11}.$$

Проверка. $\begin{cases} 5\dfrac{1}{11} - 2\dfrac{8}{11} = -1; \\ \dfrac{1}{11} + 4\dfrac{8}{11} = 3. \end{cases}$

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_1 \qquad + 4x_3 = -1; \\ x_1 + 2x_2 \qquad = -3 \end{cases}$ по формулам Крамера и сделать проверку.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -14 \neq 0, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -10,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 26, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 6.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{7}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{13}{7}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{3}{7}.$$

Проверка. $\begin{cases} 2 \cdot \dfrac{5}{7} - \left(-\dfrac{13}{7}\right) + 3 \cdot \left(\dfrac{3}{7}\right) = -1; \\ \dfrac{5}{7} + 4 \cdot \left(-\dfrac{3}{7}\right) = -1; \\ \dfrac{5}{7} + 2 \cdot \left(\dfrac{3}{7}\right) = -3. \end{cases}$

Практические занятия 17-20. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0; \\ x_1 - \ \ x_2 = -1 \end{cases}$ различными способами.

1. Метод Гаусса. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$

$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$. $\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 2. \end{cases}$

2. Формулы Крамера.

$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$

$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-2}{-2} = 1, \ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-4}{-2} = 2.$

3. Матричный метод.

Матрица $\mathbf{A}^{-1}$ обратная $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$: $\quad \mathbf{A}^{-1} = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1\cdot 0 + 2\cdot(-1) \\ -1\cdot 0 + 4\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Практические занятия 21-22. Вычисление ранга матриц.

Пример. Установить ранг матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Минор порядка 1 (выбраны 1-ая строка и 1-ый столбец): $5 \neq 0$.

Минор порядка 2 (выбраны 1-ая, 2-ая строки и 1-ый, 2-ая столбцы):

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 5\cdot 0 - (-1)\cdot 2 = 2 \neq 0.$$

Минор порядка 3: $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Существует минор второго порядка, отличной от нуля, при этом единственный минор третьего порядка равен нулю: rang**A** = 2.

Пример. Найти ранг матрицы **A** = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Минор порядка 1: $2 \neq 0$.

Минор порядка 2: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 \neq 0$.

Минор порядка 3: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot 6\cdot 9 \neq 0$.

Все миноры порядка 4 имеют нулевую строку и равны нулю: rang**A** = 3.

Замечание. Матрицы подобные матрице **A** называются ступенчатыми (трапециевидными). Ранг ступенчатой матрицы равен числу строк, не все элементы которых равны нулю.

Пример. Найти ранг матрицы **A** = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix} \sim \left\langle \begin{matrix} \text{Ко второй строке прибавлена первая,} \\ \text{умноженная на } (-2); \\ \text{к третьей строке } - \text{ первая,} \\ \text{умноженнная на } (-5). \end{matrix} \right\rangle$$

После перемены местами двух последних строк $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ матрица становится ступенчатой с двумя ненулевыми строками, следовательно, rang**A** = 2.

Практические занятия 23-24. Исследование СЛАУ по теореме Кронекера-Капелли.

Теорема Кронекера–Капелли

Пример. Исследовать систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5; \\ 3x_1 + 6x_2 = 15. \end{cases}$

Матрица системы: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Расширенная матрица: $\mathbf{A}^{\text{р}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$.

Миноры второго порядка этих матриц $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 15 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{vmatrix}$ равны нулю. Ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы

$$r = \text{rang}\mathbf{A} = \text{rang}\mathbf{A}^{\text{р}} = 1.$$

Система совместна. Из двух неизвестных x_1, x_2, одна, например x_2, является свободной. Если $x_2 = \alpha$ (α – любое число), то $x_1 = 5 - 2\alpha$.

Пример. При каких A и B система $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = B; \\ 3x_1 + Ax_2 = 15. \end{cases}$ является неопределённой?

Система имеет бесконечное множество решений,

если миноры $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & A \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & B \\ 3 & 15 \end{vmatrix}$ расширенной матрицы равны нулю.

После раскрытия определителей: $\begin{cases} 1 \cdot A - 2 \cdot 3 = 0; \\ 2 \cdot 15 - 6 \cdot B = 0. \end{cases}$

Система является неопределённой при $A = 6$; $B = 5$.

Пример. Установить число свободных неизвестных в системе уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_4 = 0; \\ \qquad x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ \qquad\qquad x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$?

Три первых строки и столбца матрицы системы образуют базисный минор: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

Ранги матрицы и расширенной матрицы: $r = \text{rang}\mathbf{A} = \text{rang}\mathbf{A}^{\text{р}} = 3$.

Число неизвестных $n = 5$;

$n - r = 2$: неизвестные x_4, x_5, например, можно считать свободными;

остальные неизвестные x_1, x_2, x_3 являются базисными.

Системы линейных уравнений

Система *m* линейных уравнений с *n* неизвестными

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=10; \\ x_1+x_2-x_3=0; \\ 4x_1-x_2+5x_3=17 \end{cases}$ и сделать проверку.

$$\mathbf{A}^{\text{p}}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 17 \end{array}\right) \qquad \left\langle \text{Расширенная матрица системы.} \right\rangle$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & -1 & 5 & 17 \end{array}\right) \qquad \left\langle \begin{array}{l} \text{Переставлены вторая} \\ \text{и первая строки.} \end{array} \right\rangle$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 10 \\ 0 & -5 & 9 & 17 \end{array}\right) \qquad \left\langle \begin{array}{l} \text{Ко второй строке прибавлена первая,} \\ \text{умноженная на } (-3); \\ \text{к третьей строке } - \text{ первая,} \\ \text{умноженная на } (-4). \end{array} \right\rangle$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array}\right) \qquad \left\langle \begin{array}{l} \text{К третьей строке прибавлена вторая,} \\ \text{умноженная на } (-5). \end{array} \right\rangle$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad \left\langle \begin{array}{l} \text{Вторая строка умножена на } (-1); \\ \text{третья строка умножена на } (-1/11). \end{array} \right\rangle$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \left\langle \begin{array}{l} \text{Ко второй строке прибавлена третья ,} \\ \text{умноженная на 4;} \\ \text{к первой строке прибавлена третья.} \end{array} \right\rangle$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad \left\langle \begin{array}{l} \text{К первой строке прибавлена} \\ \text{вторая, умноженная на } (-1). \end{array} \right\rangle$$

Совместная и определённая система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x_1=1; \\ x_2=2; \\ x_3=3. \end{cases} \qquad \text{Проверка. } \begin{cases} 3\cdot 1+2\cdot 2+3=10; \\ 1+2-3=0; \\ 4\cdot 1-2+5\cdot 3=17. \end{cases}$$

Пример. Установить значения параметров A и B, при которых система $\begin{cases} 1x+2y=B; \\ Ax+4y=10 \end{cases}$ является неопределённой? Найти решения системы. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 1x+2y=B; \\ Ax+4y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x+2y=B; \\ (A-2)x+0y=10-2B. \end{cases}$$

Система при A = 2 и B = 5: $\begin{cases} 1x+2y=5; \\ 0x+0y=0. \end{cases}$

Эта система имеет бесконечное множество решений, которые можно представить в виде $x = 5 - 2y$. Проверка. $\begin{cases} (5-2y)+2y\equiv 5; \\ 2(5-2y)+4y\equiv 10. \end{cases}$.

Пример. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 1x_1-2x_2+3x_3=0; \\ 2x_1-1x_2+6x_3=0; \\ 5x_1+1x_2+4x_3=0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 1x_1-2x_2+3x_3=0; \\ 0x_1-0x_2+0x_3=0; \\ 0x_1+11x_2-11x_3=0. \end{cases} \left\langle \begin{array}{l} \text{Ко второй строке прибавлена первая,} \\ \text{умноженная на } (-2); \\ \text{к третьей строке } - \text{ первая,} \\ \text{умноженная на } (-5). \end{array} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=0; \\ x_2-x_3=0; \\ 0x_1-0x_2+0x_3=0. \end{cases} \left\langle \begin{array}{l} \text{Вторая строка умножена на } 1/11; \\ \text{вторая и третья строки переставлены.} \end{array} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x_1+x_3=0; \\ x_2-x_3=0; \\ 0x_1-0x_2+0x_3=0. \end{cases} \left\langle \begin{array}{l} \text{К первой строке прибавлена вторая,} \\ \text{умноженная на 2.} \end{array} \right\rangle$$

Совместная неопределённая система имеет множество решений, которые можно представить в виде $\begin{cases} x_1=-x_3; \\ x_2=x_3. \end{cases}$

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x_1+2x_2+3x_3=-2 \\ 2x_1+8x_2-x_3=8 \\ 9x_1+x_2+8x_3=0. \end{cases}$

$$\mathbf{A}^{\text{р}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 & 8 \\ 9 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 8 & -1 & 8 \\ 9 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 7 & -\frac{5}{2} & -9 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{4} & \frac{9}{4} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{14} & \frac{9}{7} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{4} & \frac{9}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{14} & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{27}{4} \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_2 - \frac{5}{14}x_3 = \frac{9}{7} \\ 0x_3 = \frac{27}{4}. \end{cases}$$

Система несовместна.

Однородные системы линейных уравнений

Система линейных уравнений **AX** = **B** называется однородной, если **B** = **0**:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, т. к. существует тривиальное (нулевое) решение $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$. Решения, отличные от тривиального, существуют, если rang**A** < n (или det**A** = 0 при $m = n$).

Пример. Имеет ли система $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 6x_1 + 9x_2 = 0 \end{cases}$ нетривиальные решения?

det**A** $= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$. Система имеет нетривиальные решения.

Пример. Доказать, что система $\begin{cases} 1x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$ имеет нетривиальные решения и найти их.

Количество неизвестных: n = 3.

Расширенная матрица **A** системы: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.

После прибавления к второй строке первой строки, умноженной на 2: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{rang}\mathbf{A}^{\mathrm{p}} = \mathrm{rang}\mathbf{A} = 1 < n$.

Базисная неизвестная: $x_1 = 2x_2 - 3x_3$;

Свободные неизвестные: x_2, x_3.