

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

Е.А. Благовещенская

Конспект лекций
по дисциплине
«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.13)

для специальности
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации
*«Безопасность автоматизированных систем на железнодорожном
транспорте»*

Форма обучения – очная

**РАЗДЕЛ 4. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ
РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Санкт-Петербург

Лекция 9. Матрицы. Типы матриц. Сложение матриц. Умножение матриц на число. Перемножение матриц.

Матрицы. Действия над матрицами

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица элементов, расположенных в m строках и n столбцах:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

i – номер строки, в которой расположен элемент ($1 \leq i \leq m$),

j – номер столбца, в котором расположен элемента a_{ij} ($1 \leq j \leq n$).

Величины m и n задают размерность матрицы. Матрица \mathbf{A}_{nn} , в которой число строк равно числу столбцов, называется квадратной. Матрица, у которой количество строк (столбцов) равно единице, называется матрицей-строкой (матрицей-столбцом) или вектором.

Равенство матриц: $\mathbf{A}_{mn} = \mathbf{B}_{mn} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$.

Транспонирование матриц: $\mathbf{B}_{nm} = \mathbf{A}_{mn}^T \Leftrightarrow b_{ij} = a_{ji}$.

Умножение матрицы на число λ : $\mathbf{B}_{mn} = \lambda \mathbf{A}_{mn} \Leftrightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Сложение матриц: $\mathbf{C}_{mn} = \mathbf{A}_{mn} + \mathbf{B}_{mn} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Операция умножения числовых матриц определена, когда число столбцов первого сомножителя совпадает с числом строк второго:

$$\mathbf{C}_{mn} = \mathbf{A}_{mp} \cdot \mathbf{B}_{pn} \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

Перестановочные матрицы – это матрицы, произведение которых коммутативно, т.е. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Квадратная матрица \mathbf{E} называется единичной, если ее элементы

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ и $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A}$, если произведение матриц \mathbf{E} и \mathbf{A} определено.

Пример. Найти x_1 и x_2 , если $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = 5.$$

Лекция 10. Определители матриц и их свойства.

Определитель (детерминант) квадратной матрицы – число, которое может быть вычислено по ее элементам. Обозначается $\det \mathbf{A}$, $D(\mathbf{A})$, Δ . Определитель матрицы первого порядка ($m = n = 1$) равен единственному элементу a_{11} . Определитель более высокого порядка может быть вычислен по рекуррентной формуле, содержащей миноры (определители низших порядков). Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы n -го порядка называется определитель $(n - 1)$ -го порядка, полученный исключением i -й строки и j -го столбца определителя n -го порядка. Алгебраическим дополнением A_{ij} называется произведение $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

Определитель n -го порядка Δ равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) и их алгебраических дополнений:

$$\Delta = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj},$$

причем результат не зависит от выбора строки (столбца) k .

Например, у матрицы второго порядка: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ алгебраические

дополнения первой строки

$$A_{11} = (-1)^{1+1} a_{22} = a_{22}; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} a_{21} = -a_{21}.$$

Определитель этой матрицы равен сумме произведений элементов первой строки и их алгебраических дополнений:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Рисунок 2.2 иллюстрирует способ выбора сомножителей в каждом слагаемом определителя второго порядка.

$$\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} * & \cdot \\ \cdot & * \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & * \\ * & \cdot \end{vmatrix}$$

Рис. 2.2

Используя полученную формулу для определителя второго порядка, можно вывести формулу вычисления определителя матрицы

$$\text{третьего порядка: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Рисунок 2.3 иллюстрирует способ выбора сомножителей в каждом слагаемом формулы (правило треугольников).

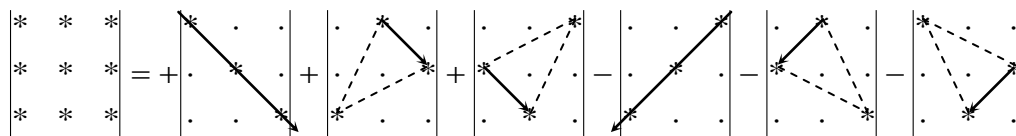


Рис. 2.3

Ниже перечислены основные свойства определителей.

Определитель не меняется при транспонировании, т.е. перемене местами строк и столбцов.

Определитель равен нулю, если содержит нулевую строку (столбец), одинаковые строки (столбцы), пропорциональные строки (столбцы).

Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) может быть вынесен за знак определителя.

Определитель меняет знак (но сохраняет абсолютную величину) при перемене местами любых двух строк (столбцов).

Определитель не меняется, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольное число, не равное нулю

Лекции 11-12.

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и их решение.

Матричная форма записи СЛАУ.

Определение и вычисление обратной матрицы.

Обратная матрица

Если определитель квадратной матрицы отличен от нуля ($\det A \neq 0$), то существует такая матрица A^{-1} , что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Лекции 14-15.

Элементарные преобразования СЛАУ.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений состоит в последовательном исключении неизвестных x_j в системе. Эти операции эквивалентны приведению расширенной матрицы системы \mathbf{A}^p к ступенчатой (прямой ход метода Гаусса) с помощью элементарных преобразований над строками \mathbf{A}^p :

- перестановка местами двух строк, что соответствует перестановке двух уравнений системы;
- умножение элементов какой-либо строки матрицы на произвольное число $\lambda \neq 0$, что соответствует умножению уравнения системы на отличное от нуля число;
- прибавление к элементам какой-либо строки матрицы соответствующих элементов другой строки, что соответствует сложению двух уравнений системы.

При поиске решения возможны три случая, приведенных в таблице 2.1:

- 1) совместная и определённая система имеет единственное решение;
- 2) совместная и неопределённая система имеет бесконечно много решений;
- 3) несовместная система не имеет решений.

Таблица 2.1

Эквивалентная ступенчатая расширенная матрица системы	Пример
<p>1.</p> $\left(\begin{array}{cccc c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$ <p>система имеет единственное решение</p>
<p>2.</p> $\left(\begin{array}{ccccc c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{r,n-1} & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array} \right), r < n.$	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ <p>система имеет бесконечное множество различных решений</p>

3.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \end{array} \right), b_{r+1} \neq 0.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

система не имеет решений

Обратный ход метода Гаусса состоит в замене нулями всех не диагональных элементов расширенной матрицы. После элементарных преобразований эквивалентная расширенная матрица системы задает систему линейных уравнений, имеющую те же решения (или не имеющую решений), что и исходная система.

Лекция 16.

Определение ранга матрицы и алгоритм вычисления ранга матрицы.

Ранг матрицы

Пусть в матрице \mathbf{A} выбраны r строк и r столбцов. Минором порядка r называется определитель, составленный из чисел, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов. Любой минор матрицы порядка r называется базисным, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $r + 1$ равны нулю (или отсутствуют в матрице в случае, когда $r + 1 > m$ или $r + 1 > n$).

Рангом матрицы \mathbf{A} (обозначение $\text{rang}\mathbf{A}$) называется порядок базисного минора.

Преобразования матрицы, не меняющие ее ранга:

- транспонирование;
- умножение элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на произвольное число $\lambda \neq 0$;
- прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца);
- перестановка местами двух строк (столбцов);
- удаление нулевых строк (столбцов).

Теорема Кронекера–Капелли

Для того чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы системы,

$$\text{rang}\mathbf{A} = \text{rang}\mathbf{A}^P.$$

