

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

---

Кафедра «Высшая математика»

**Е.А. Благовещенская**

**Методические указания  
по выполнению практических заданий  
*по дисциплине*  
«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» (Б1.Б.13)**

для специальности  
10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

по специализации  
«Информационная безопасность автоматизированных систем на  
транспорте»

Форма обучения – очная

### **РАЗДЕЛ 3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА**

Санкт-Петербург

## Практическое занятие 8.

Представление комплексного числа в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Операции над комплексными числами.

### Три формы записи комплексного числа

**Пример.** Установить геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению  $\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} - 4 = 0$ .

$$z = x + iy; \bar{z} = x - iy; \operatorname{Re} \bar{z} = x; \operatorname{Im} z = y; \frac{x}{y} - 4 = 0; y = \frac{x}{4}.$$

**Пример.** Найти вещественную часть числа  $z$ , если  $|z| = 12$  и

$$\arg z = \arccos \frac{1}{6}.$$

$$\varphi = \arg z = \arccos \frac{1}{6}; \cos \varphi = \frac{1}{6}; \operatorname{Re} z = |z| \cos \varphi = 2.$$

**Пример.** Найти модуль комплексного числа  $z$ , если  $\operatorname{Im} z = 10$  и

$$\arg z = \arcsin \frac{5}{6}.$$

$$\varphi = \arg z = \arcsin \frac{5}{6}; \sin \varphi = \frac{5}{6}; \operatorname{Im} z = |z| \sin \varphi; |z| = \frac{\operatorname{Im} z}{\sin \varphi} = 12.$$

**Пример.** Найти модуль и аргумент комплексного числа  $z = -3 + 3i$  (рис. 1.2), записать его тригонометрическую и показательную формы.

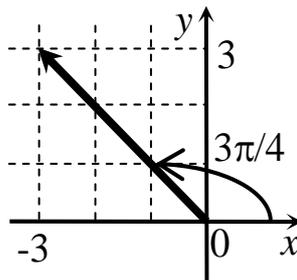


Рис. 1.2

$$r = |z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}, \arg z = \arccos \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4}.$$

$$z = 3\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) - \text{тригонометрическая форма.}$$

$$z = 3\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} - \text{показательная форма.}$$

**Пример.** Вычислить  $z + \bar{z}$ ,  $z - \bar{z}$ ,  $z \cdot \bar{z}$ ,  $\bar{z} / |z|$ , если  $z = 2 + \sqrt{5}i$ .

Для  $z = 2 + \sqrt{5}i$  сопряженное комплексное число  $\bar{z} = 2 - \sqrt{5}i$ .

$$z + \bar{z} = 2 + \sqrt{5}i + 2 - \sqrt{5}i = 4;$$

$$z - \bar{z} = 2 + \sqrt{5}i - 2 + \sqrt{5}i = 2\sqrt{5}i;$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2 = 9, |z| = \sqrt{9} = 3;$$

$$\frac{\bar{z}}{|z|} = \frac{2 - \sqrt{5}i}{3} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}i.$$

**Пример.** Найти  $z_1 \cdot z_2$  и  $\frac{z_1}{z_2}$ , если  $z_1 = 1 - i$ ,  $z_2 = 2 + i$ .

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(2 + i) = 2 - 2i + i - i^2 = 2 - 2i + i + 1 = 3 - i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(1 - i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2 - i - 2i + i^2}{4 - i^2} = \frac{1 - 3i}{4 + 1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i.$$

**Пример.** Найти вещественную и мнимую части комплексного числа  $z = (1 + i)^2$ .

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i.$$

Вещественную часть комплексного числа  $z = (1 + i)^2$ :  $\operatorname{Re}z = 0$ ;

Мнимая часть комплексного числа  $z = (1 + i)^2$ :  $\operatorname{Im}z = 2$ .

**Пример.** Вычислить  $2z - z^2$  при  $z = -1 + 2i$ .

$$2z - z^2 = 2(-1 + 2i) - (-1 + 2i)^2 = -2 + 4i - 1 + 4i + 4 = 1 + 8i.$$

**Пример.** Найти  $z^2$  и  $\sqrt[3]{z}$ , если  $z = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$  (рис. 1.2).

$$z^2 = \left(3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^2 = (3\sqrt{2})^2 e^{i\frac{3\pi}{2}} = 18e^{i\frac{3\pi}{2}} = 18\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 18(0 + i(-1)) = -18i;$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \left(3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{18}e^{i\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}}, (k = 0; 1; 2);$$

$$\text{при } k = 0: z_1 = \sqrt[6]{18}e^{i\frac{3\pi/4}{3}} = \sqrt[6]{18}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \approx 1,145 + i \cdot 1,145;$$

при  $k = 1$ :

$$z_2 = \sqrt[6]{18}e^{i\frac{3\pi/4+2\pi}{3}} = \sqrt[6]{18}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) \approx -1,564 + i \cdot 0,419;$$

при  $k = 2$ :

$$z_3 = \sqrt[6]{18} e^{i \frac{3\pi/4 + 4\pi}{3}} = \sqrt[6]{18} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) \approx 0,419 - i \cdot 1,564.$$

**Пример.** Доказать, что  $\sqrt{-1} = \pm i$ .

Комплексное число  $-1$  имеет вид  $z = -1 + 0i$ .

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \quad \varphi = \arg z = \arccos \frac{-1}{1} = \pi.$$

Формула  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left( \cos \left( \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right)$  при  $n = 2$ :

$$\sqrt{-1} = \sqrt{1} \cdot \left( \cos \left( \frac{\pi + 2\pi k}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi + 2\pi k}{2} \right) \right).$$

$$\text{При } k = 0: \sqrt{-1} = \sqrt{1} \cdot \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \right) = \sqrt{1} \cdot (0 + i \cdot 1) = i;$$

$$\text{при } k = 1: \sqrt{-1} = \sqrt{1} \cdot \left( \cos \left( \frac{\pi + 2\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi + 2\pi}{2} \right) \right) = \sqrt{1} \cdot (0 - i \cdot 1) = -i.$$

**Пример.** Решить уравнение  $z^2 - 4z + 13 = 0$ .

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36} \cdot i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Уравнение имеет комплексные корни  $z_1 = 2 + 3i$ ,  $z_2 = 2 - 3i$ .

**Пример.** Решить биквадратное уравнение  $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$ .

Обозначим  $t = z^2$ . Тогда  $z^4 = t^2$ .

Уравнение  $t^2 - 3t - 4 = 0$  имеет корни  $t = 4$  и  $t = -1$ .

После решения уравнений  $z^2 = 4$  и  $z^2 = -1$  получаем четыре корня биквадратного уравнения  $z_1 = 2$ ,  $z_2 = -2$ ,  $z_3 = i$ ,  $z_4 = -i$ .

**Пример.** Доказать, что комплексные числа  $a + bi$  и  $a - bi$  являются корнями уравнения  $z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0$ .

Подстановка  $z = a + bi$  в уравнение:

$$z^2 - 2az + a^2 + b^2 = (z - a)^2 + b^2 = (a + bi - a)^2 + b^2 = (bi)^2 + b^2 = 0.$$

Подстановка  $z = a - bi$  в уравнение:

$$z^2 - 2az + a^2 + b^2 = (z - a)^2 + b^2 = (a - bi - a)^2 + b^2 = (-bi)^2 + b^2 = 0.$$

**Пример.** Доказать равенство  $\cos^3 \varphi = \frac{1}{4} \cos 3\varphi + \frac{3}{4} \cos \varphi$ .

По формуле Эйлера  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$ :  $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \cdot \sin \varphi$ .

$$\cos \varphi = \frac{\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi + \cos \varphi - i \cdot \sin \varphi}{2} = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}.$$

$$\cos^3 \varphi = \left( \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3i\varphi} + 3e^{i\varphi} + 3e^{-i\varphi} + e^{-3i\varphi}) =$$

$$= \frac{1}{8} (\cos 3\varphi + i \cdot \sin 3\varphi + 3(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) +$$

$$+ 3(\cos \varphi - i \cdot \sin \varphi) + \cos 3\varphi - i \cdot \sin 3\varphi) = \frac{1}{4} \cos 3\varphi + \frac{3}{4} \cos \varphi.$$

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вычислите  $(2 + 3i) + (-3 + 4i) - (3 - 2i)$ .

*Ответ:*  $-4 + 9i$ .

2. Вычислите  $2z_1 - 3z_2$ , если  $z_1 = 1 - i$ ,  $z_2 = 2 + 3i$ .

*Ответ:*  $-4 - 11i$ .

3. Вычислите  $(2+3i) \cdot (3+4i)$ .

*Ответ:*  $-6 + 17i$ .

4. Вычислите  $(3 - 2i) \cdot (5 + 4i) - 7i + 1$ .

*Ответ:*  $24 - 5i$ .

5. Вычислите  $(4 - 3i) \cdot (2 + 5i) \cdot (7i + 1)$ .

*Ответ:*  $-75 + 175i$ .

6. Вычислите  $\frac{2 + 3i}{5 + 4i}$ .

*Ответ:*  $\frac{22}{41} + \frac{7}{41}i$ .

7. Найдите модуль и аргумент комплексного числа  $z = \frac{2}{1 - i\sqrt{3}} - 1$ .

*Ответ:*  $1; 2\pi/3$ .

8. Вычислите  $2e^{iz}$  в точке  $z = \pi - 2i$ .

Ответ:  $-2e^2$ .

9. Запишите комплексное число  $z = 1 + \frac{i}{1-i}$  в показательной форме.

Ответ:  $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

10. Запишите алгебраическую форму произведения  $z_1 \cdot z_2$ , где  $z_1 = 2 \cdot e^{i\pi/4}$ ,  $z_2 = 3 \cdot e^{i\pi/12}$ .

Ответ:  $6+6i$ .

11. Вычислите  $\left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^6$ .

Ответ:  $-1$ .

12. Вычислите  $i^{10}$ .

Ответ:  $1$ .

13. Найдите модуль и аргумент комплексного числа  $(1+i)^5$ .

Ответ:  $4\sqrt{2}; -\frac{3\pi}{4}$ .

14. Вычислите  $\sqrt[3]{8i}$ , сделайте проверку.

Ответ:  $\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} + i; -2i$ .

15. Установите геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению  $z \cdot \bar{z} - 2 \cdot \operatorname{Im} z + \operatorname{Re}(z^2) - 1 = 0$

Ответ:  $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$ .

16. Докажите формулу  $\sin^3 \varphi = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi$ , применив формулу Эйлера.

17. Докажите формулу  $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$ , применив формулу Эйлера.

18. Решите уравнение  $z^2 + 4z + 13 = 0$ .

*Ответ:*  $-2 + 3i; -2 - 3i$ .

19. Решите уравнение  $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$ .

*Ответ:*  $1; -1; 2i; -2i$ .

20. Решите уравнение  $(z^2 + 2z)^2 + 7(z^2 + 2z) + 10 = 0$ .

*Ответ:*  $-1 + i; -1 - i; -1 + 2i; -1 - 2i$ .

21. Составьте квадратное уравнение с вещественными коэффициентами, корнем которого является комплексное число  $3 + 4i$ .

*Ответ:*  $z^2 - 6z + 25 = 0$ .