Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I»

Кафедра «Инженерная геодезия»

Методы оптимального программирования

Учебное пособие для направления подготовки
120700.62
«Землеустройство и кадастры»

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2015

УДК 004.932

ББК 32.973.26–018.2:26

Методы оптимального программирования. Учебное пособие / В.С. Меркушева, Н.Н. Богомолова – СПб.: Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, 2015. – 48 с.

Учебное пособие предназначено для студентов направления 120700.62 «Землеустройство и кадастры» при изучении дисциплины «Экономико-математические методы и моделирование».

В пособии рассмотрены методы оптимального программирования. Сформулирована общая задача линейного программирования. Изложены общие сведения о математических методах и моделях линейного программирования, таких как: симплексный метод, алгебраический симплексный метод, метод искусственного базиса, двойственный симплексный метод. Рассмотрены методы решения транспортной задачи линейного программирования, а именно распределительный метод, метод потенциалов. Определены задачи целочисленного программирования, нелинейного программирования, динамического программирования.

Введение

Экономико-математические методы – это обобщающее название комплекса экономических и математических научных дисциплин, объединенных для изучения экономики, в частности решения задач управления экономическими объектами.

Экономико-статистические модели и функции часто применяются при сборе и обработке геодезических данных в землеустройстве, земельном и городском кадастре, при мониторинге земель, а также при статистической обработке землеустроительной и кадастровой информации.

Методы оптимального программирования применяются в технико-экономическом планировании топографо-геодезических работ, при разработке генеральных схем пользования и охраны земель, при решении задач по определению оптимальных размеров землепользования, в решении вопросов по наиболее эффективному использованию с/х земель конкретными предприятиями, а также при принятии решений о целесообразности инвестиций в земельные участки.

Под математическим (оптимальным) программированием понимается общий термин, которым обозначает два взаимосвязанных комплекса научных дисциплин. С одной стороны, это экономические дисциплины, использующие математику (методы разработки планов и программ – организация и планирование строительства), методы регулирования хозяйственной деятельности (анализ хозяйственной деятельности строительной организации, управление трудовым коллективом, менеджмент в строительстве), расчета оптимальных цен (экономика строительства), а с другой стороны – математические дисциплины, объединенные общим термином «математическое программирование», которые применяются как в экономике, так и за ее пределами (линейное программирование, нелинейное программирование, дискретное программирование, динамическое программирование и др.). Под термином «оптимальное программирование» будем иметь в виду его второе понятие, т.е. математическое программирование.

Математические методы используются при принятии оптимальных решений, связанных с организацией использования земельного фонда страны, а также при оценке стоимости земель в зависимости от ценообразующих факторов.

Классическое определение термина «математическое программирование» следующее:

математическое программирование изучает теорию и методы решения задач на нахождение экстремума целевой функции (показателя качества решения) при ограничениях в форме уравнений и неравенств [1].

Следовательно, общая задача математического программирования состоит в нахождении экстремального значения целевой функции, причем значение переменных должны принадлежать некоторой области допустимых значений.

В самом общем виде задача математического программирования записывается следующим образом:

$$Y=F(X)\rightarrow ext,$$

где $F(X)$ – целевая функция, которая отражает критерий оптимальности плана (в конкретной задаче может быть только единственным);

$X=(x_1,\ldots.x_n)$ – n –мерный вектор, т.е. упорядоченная последовательность переменных X_j ;

M – область допустимых значений переменных X_j.

В зависимости от конкретных расчетов и использования исходных данных в качестве показателей, формирующих критерий оптимальности, принимаются:

- себестоимость продукции (услуг);
- прибыль (убытки);
- приведенные затраты;
- транспортные и другие издержки;
- срок строительства и т.п.

При этом критерий оптимальности может быть выражен как в стоимостной форме, так и в натуральной форме.

В настоящее время наиболее разработанной и широко применяемой на практике областью математического программирования является линейное программирование.

Частный случай задачи математического программирования– «классическая задача». В ней область M представлена равенствами:

$$g(x)=b,$$

где $g(x)$ – вектор функций ограничений;

b – вектор констант ограничений.

Методы оптимального программирования используются в зависимости от вида решаемых задач. Задачи оптимального программирования могут быть трех видов: <u>*общая задача линейного программирования, транспортная задача и распределительная задача*</u>.

Названные выше методы математического программирования (и соответствующие дисциплины) отличаются друг от друга видом целевой функции $F(X)$ и областью определения M:

1.Если целевая функция $F(X)$ линейна и множество M, на котором ищется ее экстремум, тоже линейно, т.е. задано системой линейных равенств и неравенств, то имеем задачу ***линейного программирования***.

2.Если же к описанным выше условиям ставится дополнительное условие, чтобы переменные были дискретны (т.е. непрерывны) или в частном случае – целочисленны, т.е. $X=(x_1,\ldots..x_n)$ – ***целочисленны***, то имеем задачу целочисленного программирования.

3. Если или целевая функция и (или) ограничения носят нелинейный характер (или то и другое вместе), то имеем задачу ***нелинейного программирования***.

В нелинейном программировании принято выделять:

а) выпуклое программирование – целевая функция выпукла (выпукла вниз) и решается задача ее минимизации, а также выпукло множество области допустимых значений, на котором решается экстремальная задача.

Функция выпукла вниз, если дуга между двумя точками на кривой, выражающий функцию, всегда лежит ниже прямой, соединяющей эти точки. Выпуклая функция не имеет перемежающихся подъемов и спусков и, следовательно, экстремумов. Поэтому при выпуклом программировании глобальный и локальный экстремумы совпадают.

б) квадратичное программирование – раздел выпуклого программирования, при котором целевая функция квадратична (т.е.

представляет собой многочлен второй степени), а ограничения линейны, т.е. линейные равенства и неравенства.

Рассмотренные задачи линейного и нелинейного программирования могут быть статическими и динамическими. В статических задачах линейного и нелинейного программирования переменные не зависят от фактора времени. Динамическими задачами линейного и нелинейного программирования называются задачи, где переменные изменяются во времени.

Если в задачах линейного и нелинейного программирования параметры целевой функции, либо параметры ограничений, либо и те и другие являются случайными величинами, т.е. содержат случайные компоненты, то имеем задачу стохастического программирования.

1. Общая задача линейного программирования

В общем виде общая задача линейного программирования может быть сформулирована как задача нахождения экстремального значения линейной функции:

$$Z = F(X) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_i \to \max(\min). \qquad (1.1)$$

При условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = b_i, i = 1,2,...m. \qquad (1.2)$$

-система «*m*» линейных уравнений с *n* переменными

$$x_j \geq 0, j=1,2,\ldots,n. \qquad (1.3)$$

Формула записи общей задачи линейного программирования (далее ЛП) в виде системы (1.1)-(1.3) называется канонической формой, т.е. если все ограничения (1.2) в задаче ЛП являются строго уравнениями и на все переменные x_j наложено условие неотрицательности (1.3), то такая задача называется канонической задачей ЛП.

Каноническую форму ограничений (1.2), как и в общей задаче ЛП, можно разделить на ограничения трех типов, например:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i, i = 1,2,...m_1. \qquad (1.2')$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = b_i, i = m_1 + 1, m_1 + 2,...m_2. \qquad (1.2'')$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \ge b_i, i = m_2 + 1, m_2 + 2,...m\ . \qquad (1.2''')$$

Эту задачу экономически можно трактовать следующим образом: найти такой план выпуска нескольких видов продукции, чтобы доход от выпуска был максимален (общая стоимость была минимальна), а расходы ресурсов на выпуск каждого вида продукции не превосходил имеющееся количество, т.е. не превосходил лимита.

Тогда в этой задаче:

X_j – количество продукции вида j, которое необходимо выпускать, причем видов продукции всего «n» (или искомые величины, содержащие решение задачи, j=1,2,…,n);

C_j– затраты на единицу продукции вида j, т.е. себестоимость продукции вида j (постоянные (известные) коэффициенты при искомых величинах), например, единичная оценка (цена, тариф, себестоимость и т.д.) одной единицы j-ого продукта, товара или услуги;

α_{ij}– норматив расхода ресурса вида i на единицу продукции вида j (количество i-ого ресурса в составе одной единицы j-ого товара, продукции или услуги);

b_i–имеющееся количество ресурсов вида i (ограничения в виде норм или нормативов на используемые ресурсы, i=1,2,…,m);

n – виды (разновидности) товаров, продукции или услуг, составляющих содержание рассматриваемого экономического процесса;

m – число (количество) видов имеющихся ресурсов (виды ресурсов в составе товаров, продукции или услуг).

Для каждой задачи ЛП можно построить сопряженную, обратную ей задачу, которая называется двойственной. У обеих этих задач функции совпадают, но если в прямой задаче находится максимум целевой функции, то у обратной – минимум целевой функции.

$$\max\sum_{j=1}^{n} C_j x_j = \min\sum_{i=1}^{m} b_i V_i, \tag{1.4}$$

где V_i – оптимальная оценка i-ого ресурса;

b_i – количество ресурса вида i.

Эти две задачи абсолютно равноправны, любую можно принять за прямую и искать к ней двойственную.

Двойственная задача заключается в том, что находится набор переменных V_1, V_2,…,V_n (называемых разрешающими множителями, объективно обусловленными оценками, двойственными ценами и т.п.), минимизирующих (или максимизирующих) линейную функцию $\sum_{i=1}^{m} b_i V_i$ при условии, что каждый включенный в план вид продукции рентабелен.

Основополагающий принцип ЛП состоит в том, что в оптимальном плане и при оптимальных оценках всех ресурсов затраты и результаты равны.

Оценки двойственной задачи обладают следующими свойствами: они показывают, насколько возрастет (или уменьшится) целевая функция прямой задачи при увеличении (или уменьшении) запаса соответствующего вида ресурсов на единицу. В частности, чем больше в нашем распоряжении данного ресурса по сравнению с потребностью в нем, тем ниже будет оценка, и наоборот. Не решая прямую задачу, по оценкам ресурсов, полученным в двойственной задаче, можно найти интересующий оптимальный план: в него войдут все технологические способы, которые оправдывают затраты, исчисленные в этих оценках.

Дадим следующие определения.

Планом задачи линейного программирования называется всякий вектор x из пространства R^n.

Допустимым планом называется такой план задачи ЛП, который удовлетворяет ограничениям (1.1)-(1.3), т.е. содержится в области D. Сама область $D=\{x \in R^n | A_x=b,\ x\geq 0\}$ называется при этом областью допустимых планов. Оптимальным планом x^* называется такой допустимый план, при котором целевая функция достигает оптимального значения, т.е. план удовлетворяет условию max $f(x)=f(x^*)$.

Величина $f^*= f(x^*)$ называется оптимальным значением целевой функции.

Решением задачи называется пара (x^*, f^*), состоящая из оптимального плана и оптимального значения целевой функции, а процесс решения заключается в объяснении множества всех решений задачи ЛП.

ЛП нашло свое наиболее эффективное применение при решении 3-х типов задач:

- общей задачи;
- распределительной задачи;
- транспортной задачи.

Эти задачи могут быть решены с помощью универсальных методов:

1. Симплексный (метод последовательного улучшения плана);
2. Двойной (двойственный) симплексный (метод последовательного улучшения оценок);
3. Альтернативный (метод сокращения невязок).

Наряду с универсальными методами для решения отдельных частных задач существуют специальные методы ЛП (более простые и экономичные по затратам времени):

1. Распределительный метод;
2. Модифицированные распределительные методы:
   - метод потенциалов (для решения транспортной задачи);
   - метод коэффициентов строк и столбцов (для решения транспортной задачи);
3. Метод разрешающих слагаемых (множителей), когда число неизвестных больше 2-х;
4. Метод базисных переменных (для решения распределительной задачи);
5. Метод условных оценок (для решения распределительной задачи);
6. Метод условно-оптимальных планов (для решения распределительной задачи).

2. Симплексный метод решения задачи линейного программирования

В 1939 г. Л.В. Канторович выдвинул идею универсального метода, названного им тогда методом разрешающих множителей. Выдающийся американский ученый Дж. Данциг предложил так же универсальный метод – симплексный, разработанный им в 1947 г. и опубликованный в журнале «Эконометрика» в 1949 г.

Симплексный метод является наиболее гибким, универсальным методом, но и наиболее трудоемким, требующим значительных затрат времени.

Сам метод происходит от слова «симплекс», т.е. выпуклый многоугольник в n-мерном пространстве с (n+1) вершинами, не лежащими в одной плоскости. Множество точек называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками содержит и их произвольную выпуклую комбинацию. Поэтому симплекс – это простейший многоугольник, содержащий в себе некоторый объем n – мерного пространства. Геометрический смысл этого определения состоит в том, что множеству вместе с его произвольными точками полностью принадлежит и прямолинейный отрезок, их соединяющий. Представим это в n-мерном пространстве.

Например:

а) в одномерном пространстве, т.е. на прямой линии симплекс – это прямолинейный отрезок, одномерной объем которого представлен его длиной (рис. 2.1).

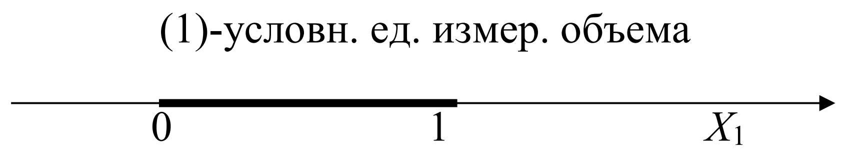

Рисунок 2.1 Симплекс в одномерном пространстве

б) в двумерном пространстве (т.е. на плоскости) симплекс – это треугольник, двухмерный объем которого представлен его площадью (рис. 2.2).

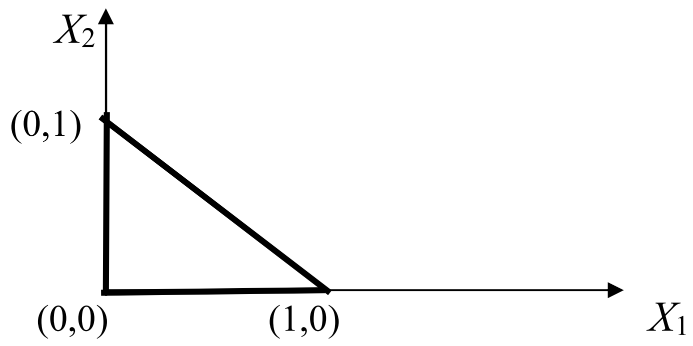

Рисунок 2.2 Симплекс в двумерном пространстве

в) в трехмерном пространстве симплекс – это тетраэдр, трехмерный объем которого совпадает с объемом тела (рис. 2.3).

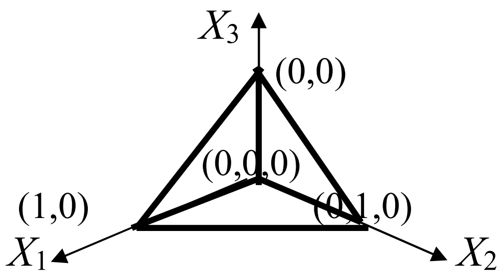

Рисунок 2.3 Симплекс в трехмерном пространстве

Угловыми точками выпуклого множества называются точки, не являющиеся выпуклой комбинацией двух произвольных точек множества. Например, угловыми треугольника являются вершины, круга – точки окружности, которая его ограничивает.

Множество планов основной задачи ЛП является выпуклым (если оно непустое). Непустое множество планов называется многогранником решений, а всякая угловая точка многогранника решений – вершиной.

Аналогично «устроены» симплексы в пространствах более высокой размерности.

Симплексный метод представляет собой вычислительную процедуру, основанную на принципе последовательного улучшения решений перехода от одного базисной точки к другой, для которой значение целевой функции больше (эти операции фиксируются в симплексной таблице).

2.1 Геометрический симплекс-метод

Базисная точка - это точка опорного плана, находящегося в вершинах области допустимых решений, т.е. в вершинах симплекса.

Геометрическая интерпретация метода состоит в последовательном движении по вершинам симплекса. Дж. Данциг доказал, что если оптимальное решение существует, то оно обязательно будет найдено через конечное число шагов (за исключением так называемой «вырожденной задачи», при которой возможно явление «зацикливания», т.е. многократное возвращение к одному и тому же положению).

Например: для случая 2-х переменных и «*K*» ресурсов (неравенств, ограничений) мы будем иметь в 2-х мерном пространстве (при $X_1>0$ и $X_2>0$) область допустимых решений, представленных многоугольником *ABCDEFGH* (*K*-угольником) (рис. 2.1.1).

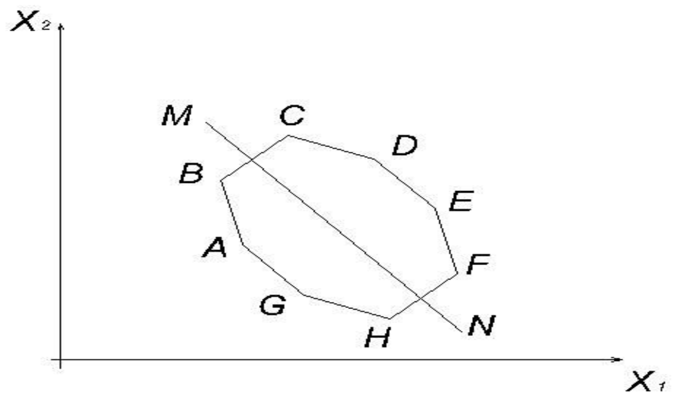

Рисунок 2.1.1 Область допустимых решений

Целевую функцию ($C_1X_1+C_2X_2$) можно представить в виде линии *MN*, а каждая пара ограничений отражается в виде взаимно-параллельных сторон многоугольника, т.е. *DE // AH*, *AB // EF*, *BC // FG*, *CD // GH*.

Здесь во всех точках *DE* (DE // MN) многоугольника достигается линейный максимум, а во всех точках AH // DE // MN достигается линейный минимум.

Таким образом, задача программирования имеет либо одно, либо бесконечное множество решений.

Если две вершины (D и E или A и H) дают экстремум линейной формы, то и все точки отрезков, соединяющие эти вершины, определяют решение задачи ЛП.

Задача ЛП будет неразрешимой, если определяющие ее условия ограничений будут противоречивы целевой функции, т.е. каждый элемент «сам по себе» (рис. 2.1.2).

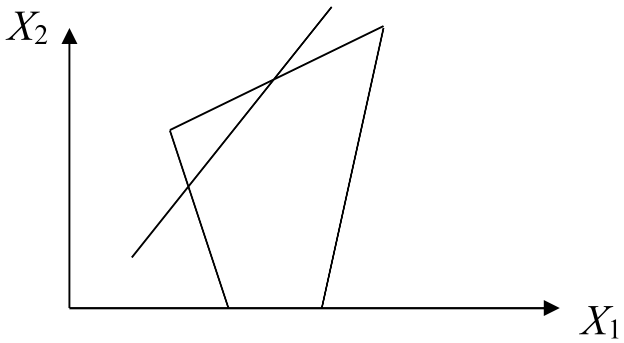

Рисунок 2.1.2 Неразрешимая задача ЛП

Решение задачи ЛП геометрическим методом включает следующие этапы.

1. На плоскости X_1OX_2 строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.
2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений.
3. Строят многоугольник решений.
4. Строят вектор $\overline{N}(c_1, c_2)$, который указывает направление возрастания целевой функции.
5. Строят начальную прямую целевой функции $c_1x_1+c_2x_2=0$ и затем передвигают ее в направлении вектора $\vec{N}$ до крайней угловой точки многоугольника решений. В результате находят точку, в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо множество точек с одинаковым максимальным значением целевой функции, если начальная прямая сливается с одной из сторон многоугольника решений, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов $(F(\overline{X}) \to \infty)$.
6. Определяют координаты точки максимум функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Минимальное значение линейной функции цели находится путем передвижения начальной прямой $c_1x_1+c_2x_2=0$ в направлении, противоположном вектору $\overline{N}(c_1, c_2)$.

Пример 2.1.1. Найдите максимум и минимум линейной функции

$$F(\overline{X}) = -(7x_1 + 5x_2) \to extr$$

при условиях-ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19, \\ 2x_1 + x_2 \le 13, \\ 3x_2 \le 15, 3x_1 \le 18, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Построим на плоскости X_1OX_2 многоугольник решений (рис. 2.1.3). Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 19, \\ 2x_1 + x_2 = 13, \\ 3x_2 = 15, 3x_1 = 18 \\ x_1, x_2 = 0. \end{cases}$$

Построив прямые системы, найдем соответствующие полуплоскости и их пересечение.

Многоугольником решений задачи является 4-угольник *ABCD*, координаты точек которого удовлетворяют условию неотрицательности переменных и неравенствам системы ограничений задачи.

Для нахождения точек экстремума построим начальную прямую $F(\overline{X}) = -(7x_1 + 5x_2) = 0$ и вектор $\overline{N}(-7,-5)$. Передвигая прямую $F(\overline{X}) = 0$ в направлении вектора $\overline{N}$, найдем точку *C*, в которой начальная прямая принимает положение опорной прямой. Следовательно, в точке *C* целевая функция имеет максимальное значение. Так как точка *C* получена в результате пересечения прямых l_3 и l_4, то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

$$\begin{cases} 3x_2 = 15, \\ 3x_1 = 18. \end{cases}$$

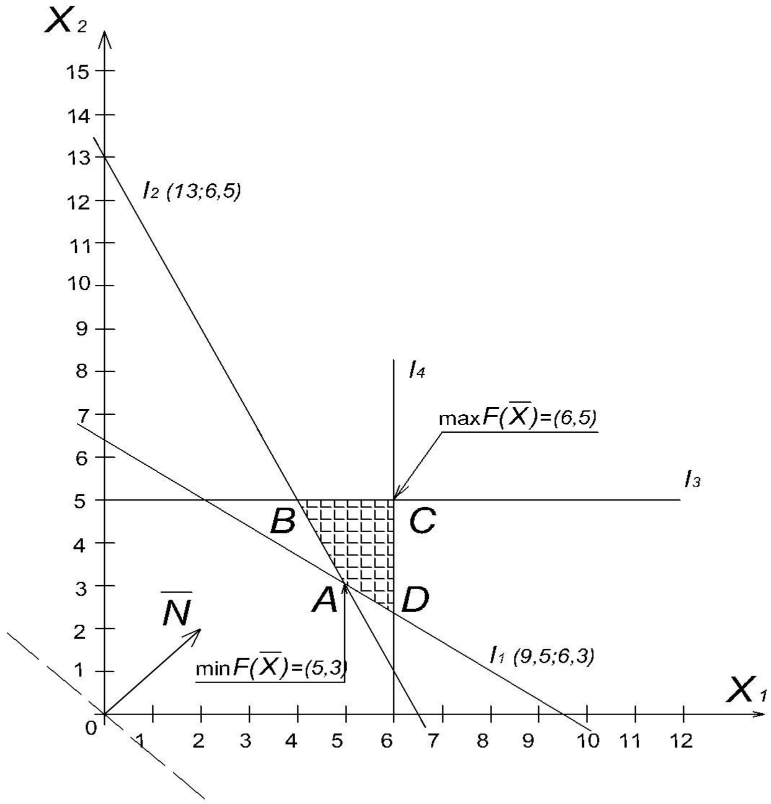

Рисунок 2.1.3 Построение многоугольника решений

Решив систему уравнений, получим: x_1=6,5; x_2=5,3; откуда найдем максимальное значение целевой функции $F_{\max}(\overline{X}) = -(7 \cdot 6{,}5 + 5 \cdot 5{,}3) = -67.$

Для нахождения минимального значения целевой функции задачи перемещаем начальную прямую в направлении, противоположном вектору $\overline{N}(c_1, c_2)$. Начальная прямая займет положение опорной прямой в вершине A, где x_1=5, x_2=3, а минимальное значение целевой функции равно:

$$F_{\min}(\overline{X}) = -(7 \cdot 5 + 5 \cdot 3) = -50.$$

2.2 Алгебраический симплексный метод

Для решения задач ЛП предложено достаточно различных алгоритмов. Наиболее эффективным среди них является алгоритм, известный под названием симплексный метод, или метод последовательного улучшения плана.

Вычислительная процедура представляет собой алгоритм упорядочения переходов от одного базисного решения к другому, которому соответствует значение функции $F(x)$. Алгебраический симплекс-метод позволяет, исходя из известного базисного решения задачи линейного программирования, получить за конечное число итераций ее оптимальное решение.

Метод основан на алгоритме Жордана-Гаусса и состоит в пошаговом исключении из числа базисных одной из переменных и заменой ее другой. Метод реализуется в форме симплекс-таблиц и переходе от одной симплекс-таблицы к другой.

Геометрически каждый переход от одной симплекс-таблицы к другой соответствует переходу от одной угловой точки многоугольной области допустимых решений к другой угловой точке в направлении убывания линейной функции.

Для использования рассмотренного алгоритма симплексного метода к минимизации линейной формы связи $F(X)$ следует искать максимум функции $F_i(X) = - F(X)$, а затем полученное решение взять с обратным знаком.

Рассмотрим алгоритм симплексного метода на примере решения задачи планирования товарооборота предприятия торговли.

Предприятие реализует n товарных групп, располагая m ограниченными материально-денежными ресурсами $b_i \geq 0$ $(i = \overline{1,m})$. Известны расходы ресурсов каждого i-вида на реализацию единицы товара по каждой группе, представленной в виде матрицы $A=(\alpha_{ij})$, и прибыль c_j получаемая предприятием от реализации единицы товара j группы (табл. 2.2.1). Необходимо определить объем и структуру товарооборота x_j $(j = \overline{1,n})$, при которых прибыль предприятия была бы максимальной (или издержки минимальны).

Таблица 2.2.1

Базисные переменные	Переменные									
	x_1	x_2	…	x_{n-2}	x_{n-2+1}	x_{n-2+2}	…	x_{n-1}	x_n	b
x_{n-2+1}	$\acute{\alpha}_{11}$	$\acute{\alpha}_{12}$	…	$\acute{\alpha}_{1,n-2}$	1	0	…	0	0	b_1
x_{n-2+2}	$\acute{\alpha}_{21}$	$\acute{\alpha}_{22}$	…	$\acute{\alpha}_{2,n-2}$	0	1	…	0	0	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_n	$\acute{\alpha}_{r1}$	$\acute{\alpha}_{r2}$	…	$\acute{\alpha}_{r,n-2}$	0	0	…	0	1	b_r
F	γ_1	γ_2	…	γ_{n-2}	0	0	…	0	0	γ_0

Математическую модель задачи запишем следующим образом: определить вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, который удовлетворяет ограничениям вида

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot x_j \le b_i, i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,n} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

и обеспечивает максимальное значение целевой функции

$$F(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \max (\min). \quad (2.2.2)$$

Алгоритм симплексного метода включает следующие этапы.

1. Составление первого опорного плана. Система ограничений задачи, решаемой симплексным методом, задана в виде системы неравенств, правые части которых $b_i \ge 0$. Перейдем от системы неравенств к системе уравнений путем введения неотрицательных дополнительных балансовых переменных. Векторы-столбцы при этих переменных представляют собой единичные векторы и образуют базис, а соответствующие им переменные называются базисными, т.е $x_1, x_2, ..., x_{n-r}$ - свободные неизвестные, $x_{n-r+1}, x_{n-r+2}, ..., x_n$ - базисные переменные.

Решим эту систему относительно свободных неизвестных, представив задачу в каноническом виде. Тогда система ограничений равенств:

$$\begin{cases} (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_1 + \ldots + \alpha_{1,n-2}x_{n-2}) + x_{n-2+1} = b_1, \\ (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_1 + \ldots + \alpha_{2,n-2}x_{n-2}) + x_{n-2+2} = b_2, \\ (\alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_1 + \ldots + \alpha_{r,n-2}x_{n-2}) + x_n = b_r, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

а целевая функция:

$$F(x) = \gamma_0 - (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_{n-2}x_{n-2}) \to \max(\min). \quad (2.2.4)$$

Опорным решением называется базисное неотрицательное решение.

Полагая, что основные переменные $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n=0$, получим допустимое базисное решение - опорный план $\overline{X} = (0,0,\ldots,0,b_1,b_2,\ldots,b_m)$, который заносим в симплексную таблицу 2. Она состоит из коэффициентов системы ограничений и свободных членов. Последняя строка таблицы называется индексной и заполняется коэффициентами функции цели, взятыми с противоположным знаком.

2. Проверка плана на оптимальность. Если значения базисных переменных неотрицательны, то решение является допустимым. Если все коэффициенты индексной строки симплексной таблицы при решении задачи на максимум неотрицательны, то план является оптимальным. Если найдется хотя бы один коэффициент индексной строки меньше нуля, то план неоптимальный, и требуется его улучшение.

3. Определение генерального столбца и строки. В качестве генерального столбца выбирается такой столбец, кроме последнего, в котором в последней строке стоит положительный элемент $\gamma_j > 0$. Если все элементы генерального столбца, кроме последнего, отрицательны, то линейная функция не ограничена, и задача ЛП решения не имеет.

В качестве генеральной строки выбирается та строка, кроме последней, в которой отношение свободного члена к положительному элементу генерального столбца наименьшее: $b_i/\alpha_{ij}=\min(b_i/\alpha_{ij})$.

Элемент симплексной таблицы, находящийся на пересечении ведущих столбца и строки, называют генеральным и помечается *.

4. Построение нового опорного плана. Переход к новому плану осуществляется в результате пересчета симплексной таблицы методом Жордана - Гаусса. Сначала заменим переменные в базисе, т.е. вместо x_i в базис войдет переменная x_j соответствующая генеральному столбцу.

Разделим все элементы ведущей строки предыдущей симплексной таблицы на генеральный элемент и результаты деления занесем в строку следующей симплексной таблицы, соответствующей введенной в базис переменной x_j. В результате этого на месте генерального элемента в следующей симплексной таблице запишем 1, а в остальных клетках j столбца, включая клетку столбца индексной строки, записываем нули. Остальные новые элементы нового плана находятся по правилу прямоугольника:

$$\alpha^{\text{новые}}{}_{ij} = \alpha_{ij} - \alpha_{nj} \cdot {}^{\alpha_{iI}}\!\!\diagup_{\alpha_{nI}}, \qquad (2.2.5)$$

где n –генеральная строка;

I – генеральный столбец;

α_{ij} – элемент старого плана;

α_{nI} – генеральный элемент;

α_{nj} и α_{iI} – элементы старого плана.

При решении задачи линейного программирования на минимум целевой функции признаком оптимальности плана являются отрицательные значения всех коэффициентов индексной строки симплексной таблицы.

Если в последнем столбце b симплексной таблицы содержатся два или несколько одинаковых наименьших значения, то новый опорный план будет вырожденным (одна или несколько базисных переменных станут равными нулю). Вырожденные планы могут привести к зацикливанию, т.е. к многократному повторению процесса вычислений, не позволяющему получить оптимальный план. В таких случаях для выбора ведущей строки используют метод Креко, который заключается в следующем. Элементы строк, имеющие одинаковые наименьшие значения b_i, делятся на предполагаемые генеральные элементы, а результаты заносятся в дополнительные строки. За генеральную строку выбирается та, в которой раньше встретится наименьшее частное при чтении таблицы слева направо по столбцам.

Пример 2.2.1.

Найти оптимальное решение канонической задачи ЛП

$$F(\overline{X}) = -(7x_1 + 5x_2) \to \min,$$

если известно допустимое базисное решение $X = (0,0,1,1,1,1)$.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ 3x_2 + x_5 = 15, \\ 3x_1 + x_6 = 18, \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, $j=1,2,\ldots,6$.

Составим исходную симплекс-таблицу (табл. 2.2.2)

Таблица 2.2.2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	2	3	1	0	0	0	19
x_4	2	1	0	1	0	0	13
x_2	0	3*	0	0	1	0	15
x_6	3	0	0	0	0	1	18
$F(\overline{X})$	7	5	0	0	0	0	0

Находим генеральный столбец и генеральную строку: 19/2=9,5; 19/3= 6,3; 13/2= 6,5; 13/1=13; 15/3=5; 18/3=6. Т.е генеральный элемент – $\acute{\alpha}_{32}$.

Вычисляем элементы новой симплекс-таблицы (табл. 2.2.3) по формуле (2.2.5).

Таблица 2.2.3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	2*	0	1	0	-1	0	4
x_4	2	0	0	1	-1/3	0	8
x_2	0	1	0	0	1/3	0	15
x_6	3	0	0	0	0	1	18
$F(\overline{X})$	7	0	0	0	-5/3	0	-25

Генеральным элементом таблицы 2.2.3 является элемент $\acute{\alpha}_{11}$. Повторяя вычисления, приходим к таблице 2.2.4.

Таблица 2.2.4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	0	2
x_4	0	0	-1/2	1	2/3*	0	4
x_2	0	1	0	0	1/3	0	5
x_6	0	0	3/2	0	3/2	1	12
$F(\overline{X})$	0	0	-7/2	0	11/6	0	-39

Генеральным элементом таблицы 2.2.4 является элемент $ά_{25}$. Повторим вычисления, получим таблицу 2.2.5.

Таблица 2.2.5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β
x_1	1	0	-1/4	3/4	0	0	5
x_5	0	0	-3/2	3/2	1	0	6
x_2	0	1	1/2	-1/2	0	0	3
x_6	0	0	3/4	3/4	0	1	3
$F(\overline{X})$	0	0	-3/4	-11/4	0	0	-50

Все элементы таблицы 2.2.5, кроме последнего, не положительны. Таким образом, найдено оптимальное базисное решение задачи ЛП: базисные неизвестные – x_1, x_5, x_2, x_6, свободные неизвестные – x_3, x_4. Линейная функция имеет вид $F(\overline{X}) = -(7 \cdot 5 + 5 \cdot 3) = -50.$

2.3 Метод искусственного базиса

Симплексный метод решения задач базируется на введении дополнительных переменных, позволяющих образовать единичную матрицу, в которую не допускаются отрицательные и другие числа, кроме нуля и единицы. Наличие единичной матрицы является необходимым условием при решении задач симплексным методом.

Если же ограничения задачи заданы в виде неравенств вида «≥» или уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot x_j \le b_i \text{ и (или) } \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot x_j = b_i, \qquad (2.3.1)$$

то невозможно сразу получить начальное базисное решение, если матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных системы ограничений, не позволяет образовать единичную матрицу.

Причем уравнения отражают жесткие условия ограничений по ресурсам, не допускающие никаких отклонений. Для соблюдения равенств вводятся искусственные переменные y_i равные нулю.

Викторы искусственных переменных образуют необходимую для решения единичную матрицу. Такой базис называется искусственным, а метод решения называется **методом искусственного базиса.** Причем искусственные переменные не имеют отношения к содержанию поставленной задачи, однако они позволяют построить стартовую точку, а процесс оптимизации вынуждает эти переменные принимать нулевые значения и обеспечить допустимость оптимального решения.

Запишем задачу ЛП в общем виде, с числом неизвестных n и ограничений r.

$$\begin{cases} (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_1 + \ldots + \alpha_{1,n-2}x_{n-2}) + x_{n-2+1} = b_1, \\ (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_1 + \ldots + \alpha_{2,n-2}x_{n-2}) + x_{n-2+2} = b_2, \\ (\alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_1 + \ldots + \alpha_{r,n-2}x_{n-2}) + x_n = b_r. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Перепишем систему (2.3.2), введя искусственные переменные $y_1, y_2\ldots, y_r$ таким образом, чтобы был выделен базис.

$$\begin{cases} y_1 = b_1 - (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_1 + \ldots + \alpha_{1,n-2}x_{n-2}) + x_{n-2+1}, \\ y_2 = b_2 - (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_1 + \ldots + \alpha_{2,n-2}x_{n-2}) + x_{n-2+2}, \\ y_r = b_r - (\alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_1 + \ldots + \alpha_{r,n-2}x_{n-2}) + x_n. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Системы (2.3.2) и (2.3.3) будут эквивалентны, если все y_i (i=1,2,…r) будут равны 0. Для этого необходимо преобразовать задачу таким образом, чтобы все искусственные переменные y_i перешли в свободные переменные. Тогда система (2.3.3) примет вид:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_1 + \ldots + \alpha_{1,n}x_n + c_{11}y_{11} + \ldots + c_{1r}y_r), \\ \qquad\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b_r - (\alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_1 + \ldots + \alpha_{r,n}x_n + c_{r1}y_1 + \ldots + c_{rr}y_r). \end{cases} \tag{2.3.4}$$

При переходе от системы (2.3.3) к системе (2.3.4) рассматривают линейную функцию $F_{\min} = y_1 + y_2 + \ldots + y_r$, равную сумме искусственных переменных. Переход считают завершенным, когда $F_{\min}$=0 и все искусственные переменные переведены в свободные переменные. При этом возможно несколько вариантов решений:

1) если $F_{\min} \neq 0$, а все y_i переведены в свободные переменные, то задача не имеет положительного решения.

2) если $F_{\min}$=0, а часть y_i осталась в базисе, то для перевода их в свободные переменные необходимо применять специальные приемы.

После того, как переход завершен, в симплекс-таблице, соответствующей системе (2.3.4), вычеркивают строку для $F_{\min}$ и столбцы для y_i и решают задачу для исходной линейной функции.

2.4 Двойственный симплексный метод

Двойственный симплексный метод основан на теории двойственности и используется для решения задач ЛП, свободные члены которых $b_i(i = \overline{1,m})$ могут принимать любые значения, а система ограничений задана неравенствами смысла «≤», «≥» или равенством «=».

В двойственном симплексном методе оптимальный план получается в результате движения по псевдопланам.

Псевдопланом называется план, в котором условия оптимальности удовлетворяются, а среди значений базисных переменных b_i имеются отрицательные числа.

Алгоритм двойственного симплексного метода включает следующие этапы.

1. Составление псевдоплана. Систему ограничений исходной задачи требуется привести к системе неравенств смысла «≤». Для этого обе части неравенств смысла «≥» необходимо умножить на (-1). Затем от системы неравенств смысла «≤» переходят к системе уравнений, вводя неотрицательные дополнительные переменные, которые являются базисными переменными. Первый опорный план заносят в симплексную таблицу.

2. Проверка плана на оптимальность. Если в полученном опорном плане не выполняется условие оптимальности, то решаем задачу симплексным методом. Если в опорном плане условия оптимальности удовлетворяются и все значения базисных переменных – положительные числа, то получен оптимальный план. Наличие отрицательных значений в столбце «Значения базисных переменных» свидетельствует о получении псевдоплана.

3. Выбор генеральной строки и столбца. Строка является генеральной, если среди отрицательных значений базисных переменных выбираются наибольшие по абсолютной величине.

Симплексную таблицу дополняют строкой τ_j, в которую заносят взятые по абсолютной величине результаты деления коэффициентов индексной строки на отрицательные коэффициенты генеральной строки. Минимальные значения τ_j определяют генеральный столбец и переменную, вводимую в базис. На пересечении генеральный строки и столбца находится генеральный элемент.

4. Расчет нового опорного плана. Новый план получаем в результате пересчета симплексной таблицы методом Жордана - Гаусса. Далее переходим к этапу 2.

Пример 2.4.1. Известно, что для геодезического сопровождения строительства объекта необходимо иметь 60 теодолитов, 50 нивелиров и 12 тахеометров. Перечисленными приборами располагают три строительные организации. Содержание единиц приборов в каждой строительной организации приведено в таблице 2.4.1. Определить план работ, обеспечивающий геодезическое сопровождение строительства при минимальных денежных затратах.

Таблица 2.4.1.

Наименование прибора	Количество приборов в строительных организациях		
	I	II	III
Теодолит	1	3	4
Нивелир	2	4	2
Тахеометр	1	4	3
Затраты на производство работ	9	12	10

Составим экономико-математическую модель задачи. Обозначим x_1, x_2, x_3 - объемы работ. Тогда необходимо определить вектор

$$\overline{X} = (x_1, x_2, x_3),$$

удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 60, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 50, \\ 1x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 12, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}, \end{cases} \qquad (2.4.1)$$

и обеспечивающий минимум целевой функции:

$$F(\overline{X}) = 9x_1 + 12x_2 + 10x_3 \to \min. \qquad (2.4.2)$$

Решение. Приведем систему ограничений (2.4.1) к системе неравенств смысла «≤», умножив обе части неравенств на (-1).

$$\begin{cases} -1x_1 - 3x_2 - 4x_3 \leq -60, \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 \leq -50, \\ -1x_1 - 4x_2 - 3x_3 \leq -12. \end{cases}$$

Переходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} -1x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = -60, \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_5 = -50, \\ -1x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_6 = -12. \end{cases}$$

За базис выбираем систему векторов A_4, A_5, A_6, так как эти векторы единичные и линейно независимые. Соответствующие единичным векторам переменные x_4 , x_5, x_6 являются базисными. Полагая, что свободные переменные x_1=x_2=x_3=0, получим первый опорный план, который заносим в симплексную таблицу 2.4.2.

$$\overline{X} = (0,0,0,-60,-50,-12), F(\overline{X_1}) = 0.$$

План I в симплексной таблице является псевдопланом, поэтому определяем генеральные строку и столбец. Среди отрицательных значений базисных переменных выбираем наибольшее по абсолютной величине значение: |-60| > |-50|, |-12|. Следовательно, строка 1 симплексной таблицы является генеральной, а переменную x_4 следует вывести из базиса. В строку τ_j заносим следующие величины:

$$\frac{-9}{-1}=9;\frac{-12}{-3}=4;\frac{-10}{-4}=2{,}5.$$

Минимальное значение τ_j соответствует 3-му столбцу, т.е. переменную x_3 необходимо ввести в базис. На пересечении генеральных строки и столбца находится генеральный элемент, равный -4.

Далее выполняем преобразование симплексной таблицы методом Жордана - Гаусса и заполняем план II.

Третий опорный план является оптимальным, так как в индексной строке все коэффициенты ≤ 0, т.е. условие оптимальности выполняется, а все значения базисных переменных — положительные числа:

$$\overline{X}^*=(0,8,9,0,0,47), F(\overline{X^*})=186.$$

Таблица 2.4.2.

План	Базисные переменные	Значения базисных переменных	Значения коэффициентов при					
			x_1	x_2	↑ x_3	x_4	x_5	x_6
I	x_4	-60	-1	-3	-4	1	0	0
	x_5	-50	-2	-4	-2	0	1	0
	x_6	-12	-1	-4	-3	0	0	1
	$F(\overline{X}_1)$	0	-9	-12	-10	0	0	0
	τ	-	9	4	2,5	-	-	-
II	x_3	15	0,25	0,75	1	-0,25	0	0
	x_5	-20	-1,5	-2,5	0	-0,5	1	0
	x_6	33	-0,25	-1,75	0	-0,75	0	1
	$F(\overline{X}_2)$	150	-6,5	-4,5↑	0	-2,5	0	0
	τ_j	-	13/3	1,8	-	5	-	-
III	x_3	9	-0,7	0	1	-0,4	0,3	0
	x_2	8	0,6	1	0	0,2	-0,4	0

	x_6 $F(\overline{X}_3)$	47 186	0,8 -3,8	0 0	0 0	-0,4 -1,6	-0,7 -1,8	1 0

3. Транспортная задача ЛП

Транспортная задача является наиболее распространенной задачей ЛП. В общем виде ее можно представить так: требуется найти такой план доставки грузов от поставщиков к потребителям, чтобы стоимость перевозки (или суммарная дальность, или объем транспортной работы в тонно-километрах) была наименьшей. Следовательно, дело сводится к наиболее рациональному прикреплению производителей к потребителям продукции (и наоборот).

В простейшем случае, когда распределяется один вид продукта (например, щебень) и потребителям безразлично, от кого из поставщиков его получать, задача формулируется следующим образом.

Имеется m пунктов производства продукции (грузов) с общим количеством продукции (грузов) в каждом пункте a_i (i=1,2,…,m). Имеется «n» пунктов потребления (пунктов назначения), потребность каждого из которых в продукции (грузе) составляет $в_j$ (j=1,2,…,n). Кроме того, известны затраты на перевозку единицы продукции от каждого поставщика к каждому потребителю – c_{ij}.

В качестве неизвестных величин выступает объем продукта (груза), которое должно быть перевезено из каждого пункта отправления в пункт назначения (потребителя) – X_{ij}.

Тогда математическая постановка транспортной задачи будет выглядеть следующим образом.

Найти такие величины X=(X_{ij}, i=1,2,…m, j=1,2,…,n), чтобы

$$L(x)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij} X_{ij} \to \min. \qquad (3.1)$$

При условии:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\,. \qquad (3.2)$$

(3.2) -условие закрытой задачи (сбалансированной), т.е. количество груза, отправляемых из всех источников, равно количеству груза, потребляемого во всех пунктах назначения;

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i,\ (i = 1,2,\ldots m). \tag{3.3}$$

(3.3) - из каждого пункта вывозят весь груз.

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j,\ (j=1,2,\ldots,\ n). \tag{3.4}$$

(3.4)– потребность каждого пункта (получателя) удовлетворяется полностью.

$$X_{ij} \geq 0,\ i=1,2,\ldots m,\ j=1,2,\ldots,\ n. \tag{3.5}$$

(3.5) – количество перевозимого груза не может быть отрицательным.

Транспортным задачам присущи следующие особенности:

- распределению подлежат однородные ресурсы;
- условия задачи описываются только уравнениями;
- все переменные выражаются в одинаковых единицах измерений;
- во всех уравнениях коэффициенты при неизвестных равны единицам;
- каждая неизвестная встречается только в двух уравнениях системы ограничений.

Транспортные задачи могут решаться симплексным методом. Однако перечисленные особенности позволяют для транспортных задач применять более простые методы: распределительный, потенциалов, дельта-метод, векторный, дифференциальных рент, способ двойного предпочтения, различные сетевые методы. Они относительно просты, по ним составлены десятки программ для различных ПЭВМ. Рассмотрим некоторые из них.

3.1 Распределительный метод решения транспортной задачи

Распределительный метод является наиболее распространенным методом решения транспортной задачи ЛП (наряду с модифицированными распределительными методами – методом потенциалов и методом коэффициентов столбцов и строк).

Для каждого опорного плана составляется распределительная (расчетная) таблица, в ячейки которой записываются поставки x_{ij} и стоимость перевозки единицы груза c_{ij}

При исследовании транспортных задач возникают следующие два вопроса:

1. Как по известному допустимому решению установить, является ли оно опорным или нет?
2. Каким образом осуществить переход от одного опорного решения к другому (улучшенному) опорному решению?

Ответы на эти вопросы связаны с понятием цикла. Цикл строится из некоторых ячеек распределительной таблицы.

Цикл изображают в виде замкнутого контура (многоугольника), сторонами которого служат горизонтальные и вертикальные отрезки, а его вершины находятся в клетках, на которых построен цикл (рис. 3.1.1)

Рисунок 3.1.1 Виды циклов

Алгоритм решения транспортной задачи распределительным методом состоит в следующем: на первом этапе составляется начальный опорный план, т.е. первое базисное решение, а на 2-м этапе, состоящем из нескольких заранее неизвестных шагов, осуществляется последовательное улучшение опорного плана до получения оптимального решения.

Пример 3.1.1

Имеется n=3 поставщиков, m=4 потребителей. Известны мощность поставщиков, спрос потребителей, расстояние и стоимость перевозки единицы груза (1 тонна). Требуется составить такой план перевозок, при котором будут вывезены все запасы поставщиков, запросы всех потребителей удовлетворены, а общая величина транспортных издержек будет минимальной.

1. Необходимо составить первоначальный план перевозок при помощи диагонального метода (метод Северо-Западного угла). При этом должно выполняться условие

$N=m+n-1=6$ заполненных клеток. Если их 5, то необходимо вписать фиктивные поставки (нули) (табл. 3.1.1).

Таблица 3.1.1

Потребители / Поставщики	1	2	3	4	Мощность поставщиков
1	2,0 10	3,0 10	4,0	1,0	20
2	1,3	1,6 17	3,2	2,5	17
3	3,1	2,4 3	2,3 5	1,7 5	13
Спрос потребителей	10	30	5	5	50

2. Общая стоимость перевозки:
$S=10\cdot2{,}0+10\cdot3{,}0+17\cdot1{,}6+3\cdot2{,}4+5\cdot2{,}3+5\cdot1{,}7=104{,}4$ руб.

3. Необходимо проверить оптимальность этого плана, для этого строят контуры, располагая вершину в свободной клетке (6 шт.) (рис. 3.1.2).

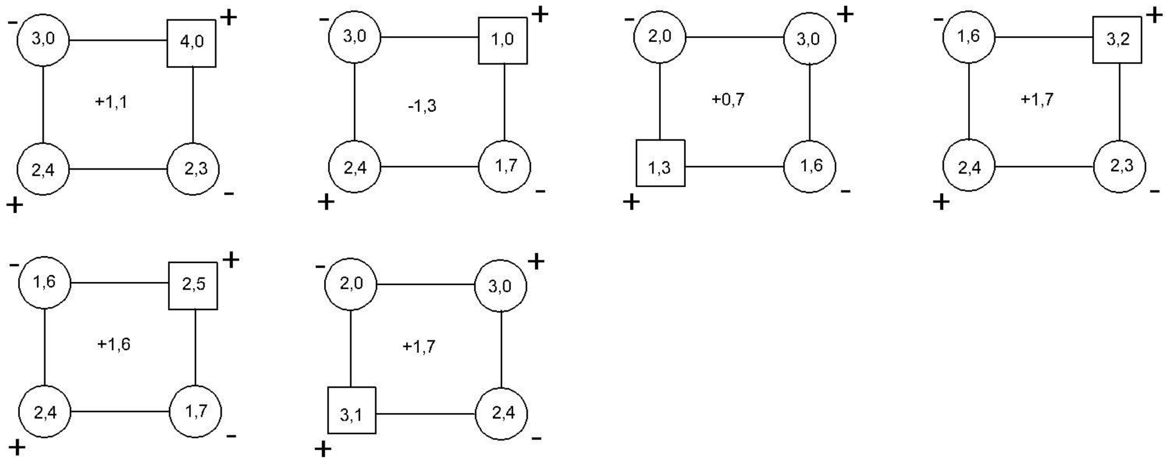

Рисунок 3.1.2 Проверка оптимальности плана

4. Расставляем знаки «+» и «-» поочередно, начиная со свободной клетки. Проверка оптимальности плана выполняется следующим образом: если алгебраическая сумма каждого контура положительна, то план оптимален. Если условие не выполняется, то выбирается контур с наибольшим нарушением принципа оптимальности, в этом контуре производится перераспределение поставок. Для этого находится наименьшая поставка, лежащая в

клетке с отрицательным знаком, и все остальные поставки меняются на эту величину с учетом знака.

5. Строится новый план (табл. 3.1.2).

Таблица 3.1.2

Потребители / Поставщики	1	2	3	4	Мощность поставщиков
1	2,0 10	3,0 5	4,0	1,0 5	20
2	1,3	1,6 17	3,2	2,5	17
3	3,1	2,4 8	2,3 5	1,7 5	13
Спрос потребителей	10	30	5	5	50

6. Выполняется проверка оптимальности (рис. 3.1.3).

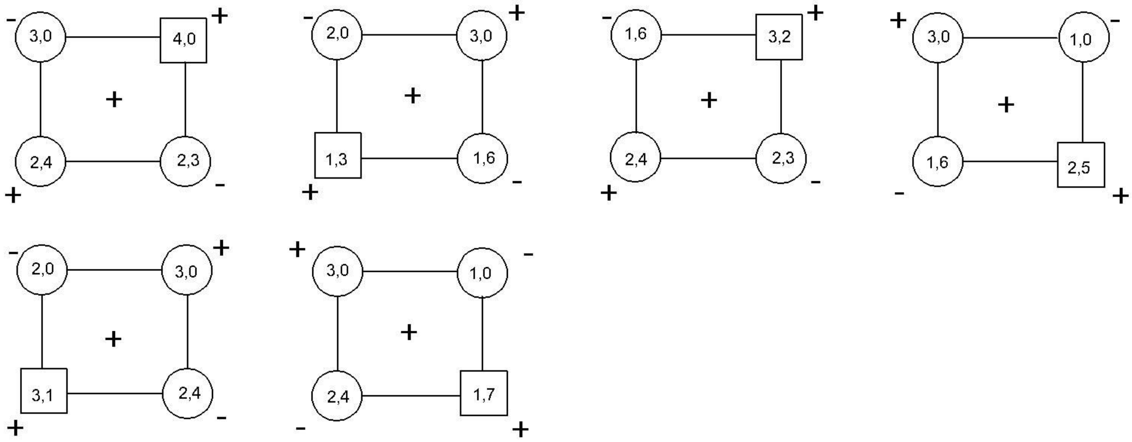

Рисунок 3.1.3 Повторная проверка оптимальности плана

3.2 Метод потенциалов

Наиболее распространенным методом решения транспортных задач является метод потенциалов.

Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов включает 7 этапов:

1. Разработка начального плана (опорного решения). Начальный план определяется методом наименьших стоимостей. Этот метод заключается в следующем. В таблице 3.2.1 находим клетку с минимальной себестоимостью c_{ij} и записываем туда максимально допустимую (возможную) поставку. Эта итерация

проводится до тех пор, пока полностью не удовлетворится спрос потребителя и не исчерпаются все мощности поставщиков.

Таблица 3.2.1

Поставщики	Потребители	n_1	…	n_j	Мощность поставщиков
	V / U	v_1	…	v_j	
m_1	U_1	c_{11} x_{11}	… …	c_{1j} x_{1j}	
…	…		…		
m_i	U_i	c_{i1} x_{i1}	… …	c_{ij} x_{ij}	
Спрос потре-бителей			…		

2. Проверка выполнения условия по загруженным клеткам:

$$N=m+n-1, \tag{3.2.1}$$

где m – количество поставщиков;

n – количество потребителей.

Если условие (3.2.1) не выполняется, план называется вырожденным. В этом случае в любые свободные клетки надо поставить фиктивные поставки, равные нулю, чтобы выполнялось условие (3.2.1). Клетки, в которых имеются фиктивные поставки считаются заполненными (занятыми).

3. Расчет потенциалов выполняется по заполненным клеткам. Для заполненных клеток должно выполняться следующее условие:

$$c_{ij} = V_j + U_i, \tag{3.2.2}$$

$i=\overline{1,3}$; $j=\overline{1,4}$. При этом первому потенциалу (обычно U_1) присваивается фиктивное значение (U_1=0).

4. Расчет стоимости S перевозок производится по формуле:

$$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij}. \tag{3.2.3}$$

5. Проверка полученного плана на оптимальность.

Для заполненных клеток должно выполняться условие:

$$U+V-C<0. \tag{3.2.4}$$

Если условие не выполняется, то необходимо перераспределить поставки и перейти к п.6.

6. Поиск максимальной клетки неоптимальности производится путем нахождения клетки, в которой максимально не выполняется условие оптимальности.

7. Составление контура перераспределения поставок (ресурсов). Контур перераспределения поставок составляется по следующим правилам:

а) контур должен быть замкнутым;

б) контур строится из клетки, в которой не выполняется условие оптимальности (с максимальной неопределенностью);

в) из клетки с максимальной неопределенностью проводят прямую до первой заполненной клетки, расположенной в одной и той же строке или столбце распределительной таблицы (т.е. отрезки ломаной не могут располагаться по диагонали строк или столбцов таблицы);

г) если линия контура пересекается в некоторой клетке, то эта клетка не принадлежит контуру. Для каждой свободной клетки распределительной таблицы всегда можно построить один единственный контур;

д) в каждой клетке контура (его вершине) необходимо поставить знаки «+» и «-», которые при обходе контура будут чередоваться, при этом начальную (свободную) клетку контура всегда считаем положительной.

8. Производим перераспределение поставок и строим новый план.

В соответствии с построенным контуром и знаками «+» и «-» в нем производится перераспределение поставок следующим образом: находим в контуре со знаком «-» наименьшую величину груза и в соответствии со знаками прибавляем или вычитаем эту величину, получая таким образом новый план. Алгоритм повторяется до достижения условия оптимальности.

Пример 3.2.1.

Имеется 3 щебеночных завода-поставщика (m=3) и 4 потребителя щебня (n=4). Задача является закрытой. Общий спрос потребителей равен всем мощностям поставщика.

Исходные данные занесены в таблицу 3.2.2.

Таблица 3.2.2

Поставщики, m	Потребители V / U	1 V_1=9	2 V_2=25	3 V_3= 13	4 V_4=14	Мощность поставщиков, тыс.м^3/год
1	U_1=0	31	34	13 40	14 30	70
2	U_2=4	30	29 30	20	26	30
3	U_3=9	18 25	34 5	16	23 30	60
Спрос потребителей, тыс.м^3/год		25	35	40	60	160

Разработаем начальный план поставок (опорное решение). Для этого используем метод наименьших стоимостей. Минимальной себестоимостью является c_{13}=13. В эту клетку необходимо записать максимально возможную поставку x_{13}=40. Далее $c_{14}=14\rightarrow x_{14}=30$. Теперь мощность поставщика n=1 исчерпана.

Следующая возможная клетка с минимальной себестоимостью $c_{31}=18\rightarrow x_{31}=25$, $c_{34}=23\rightarrow x_{34}=30$. На этом этапе удовлетворяется спрос потребителя n=1 и n=4.

Следующая клетка с минимальной себестоимостью c_{22}=23 $n\rightarrow x_{22}=30$, c_{32}=34 $n\rightarrow x_{32}=5$. Таким образом, удовлетворен спрос всех потребителей, и исчерпаны мощности всех поставщиков, получен первый опорный план. Этот план необходимо проверить по условиям (3.2.1)-(3.2.4).

$N=m+n-1=3+4-1=6$ – условие выполняется, следовательно, фиктивные поставки не требуются.

Определим значения потенциалов по формуле (3.2.2) для заполненных клеток. Для этого присвоим первому потенциалу U_1 нулевое значение.

$$V_3 = c_{13} - U_1 = 13 - 0 = 13,$$
$$V_4 = c_{14} - U_1 = 14 - 0 = 14,$$
$$U_3 = c_{34} - V_4 = 23 - 14 = 9,$$
$$V_2 = c_{32} - U_3 = 34 - 9 = 25,$$
$$V_1 = c_{31} - U_3 = 18 - 9 = 9,$$
$$U_2 = c_{22} - V_2 = 29 - 25 = 4.$$

Произведем расчет стоимости перевозок:

S=40·13+30·14+30·29+25·18+5·34+30·23=3120 у.е.

Проверим план по условию оптимальности (3.2.4).

$U_1+V_1-c_{11}$=9+0-31<0, условие выполняется.

$U_1+V_2-c_{12}$=0+25-34<0, условие выполняется.

$U_2+V_1-c_{21}$=4+9-30<0, условие выполняется.

$U_2+V_3-c_{23}$=4+13-20<0, условие выполняется.

$U_2+V_4-c_{24}$=4+14-26<0, условие выполняется.

$U_3+V_3-c_{33}$=9+13-16<0, условие не выполняется.

В клетке [3,3] условие оптимальности не выполняется, следовательно, необходимо перераспределить поставки и построить новый план. Для этого необходимо нарисовать контур из клетки, в которой не выполняется условие (3.2.4) (см. табл. 3.2.3).

Таблица 3.2.3

Поставщики, m	Потребители	1	2	3	4	Мощность поставщиков, тыс.м³/год
	V / U	V_1=9	V_2=25	V_3=13	V_4=14	
1	U_1=0	31	34	13 40 -	14 + 30	70
2	U_2=4	30	29 30	20	26	30
3	U_3=9	18 25	34 5	16 +	23 - 30	60
Спрос потребителей, тыс.м³/год		25	35	40	60	160

В соответствии с расставленными знаками произведем перераспределение поставок и составим новый план поставок, который представлен в таблице 3.2.4.

Таблица 3.2.4

Поставщики, m	Потребители	1	2	3	4	Мощность поставщиков, тыс.м³/год
	V / U	V_1=15	V_2=31	V_3=13	V_4=14	
1	U_1=0	31	34	13 10	14 60	70
2	U_2=-2	30	29 30	20	26	30
3	U_3=3	18 25	34 5	16 30	23	60
Спрос потребителей, тыс.м³/год		25	35	40	60	160

В контуре со знаком «-» наименьшая величина поставки находится в клетке [3,4], x_{34}=30. В соответствии со знаками эту величину необходимо прибавить и вычесть в вершинах контура. Получим новый план поставок щебня и проверим его на оптимальность, начиная с п. 2.

2. N=6, условие выполняется.

3. $V_3 = c_{13} - U_1$=13-0=13,

$V_4 = c_{14} - U_1$=14-0=14,

$U_3 = c_{33} - V_3$=16-3=13,

$V_2 = c_{32} - U_3$=34-31=3,

$U_2 = c_{22} - V_2$=29-31=-2

$V_1 = c_{31} - U_3$=18-3=15.

4. S=10·13+60·14+30·29+25·18+5·34+30·16=2940 у.е.

5. $U_1+V_1-c_{11}$=0+15-31<0, условие выполняется.

$U_1+V_2-c_{12}$=0+31-34<0, условие выполняется.

$U_2+V_1-c_{21}$=-2+15-30<0, условие выполняется.

$U_2+V_3-c_{23}$=-2+13-20<0, условие выполняется.

$U_2+V_4-c_{24}$=-2+14-26<0, условие выполняется.

$U_3+V_4-c_{44}$=3+14-23<0, условие не выполняется.

Полученный план является оптимальным. При таком плане перевоза груза будет достигнута минимальная себестоимость, S=2940 у.е.

4. Задача целочисленного программирования

Целочисленное программирование отличается от рассмотренного ЛП тем, что на исследуемые переменные накладывается условие целочисленности. В экономике огромное количество задач несет дискретный (целочисленный) характер. Нельзя, например, построить две трети дома, купить три четвертых экскаватора, продать пол бульдозера и т.д.

Часто в практических задачах искомое переменное принимает только два значения – единицу или ноль (например, строить или не строить, покупать или не покупать, т.е. быть или не быть и т.п.)

Для решения задач целочисленного программирования применяется ряд методов (способов). Самый простой – решение обычной задачи ЛП с проверкой полученного результата на целочисленность и его округлением до приближенного целочисленного решения. Однако здесь нет гарантии, что такое решение будет оптимальным. Поэтому существуют специальные методы, которые позволяют в процессе решения получить именно целочисленное решение.

К специальным методам относятся циклический алгоритм Гомори, прямой целочисленный алгоритм Юнга, алгоритм Ху и др.

4.1 Метод отсечения (метод Гомори)

Метод Гомори основан на идее введения отсекающих плоскостей. Решение задачи этим методом представляет собой модификацию двойственного симплекс-метода. Основное отличие этого алгоритма от двойственного симплекс-метода состоит в том, что в качестве ведущей строки используется отсечения Гомори с ведущим элементом, равным (-1).

Общий алгоритм метода Гомори состоит из трех этапов.

1 этап. Решение задачи методами ЛП (симплекс или двойственный симплекс). Здесь в качестве «текущей» задачи выступает нецелочисленный аналог исходной целочисленной задачи ЛП.

2 этап. Определение первой нецелочисленной компоненты в оптимальном плане, полученном на 1 этапе. Если оптимальный план является целочисленным, то решение завершается.

3 этап. Если полученный оптимальный план не целочисленный (т.е. не выполняется условие целочисленности), то к ограничениям (обычно к последнему фрагменту симплексной таблицы, содержащей оптимальное решение) добавляется новое ограничение, обладающее следующими свойствами:

- линейность;

- отсекает найденное нецелочисленное оптимальное решение;

-сохраняет все целочисленные решения задачи.

Это ограничение имеет название – *правильное отсечение*.

Правильное отсечение можно построить следующим образом. Пусть $x_i = b_i - \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_{ik} x_k ; i = \overline{1,m}$ (4.1) – оптимальное решение задачи и b_i – ее наибольшая нецелочисленная компонента. Любое вещественное число a можно представить в виде суммы его целой и дробной частей, т.е.

$$a = [a] + \{a\}. \qquad (4.2)$$

Например, для числа 4,9 его целая часть [4,9]=4, а дробная {4,9}=0,9 и, следовательно, 4,9=4+0,9.

Правую часть равенства (4.1) запишем с помощью равенства (4.2):

$$x_i = [b_i] - \sum_{k=m+1}^{n} [\alpha_{ik}] x_k + \{b_{\mathrm{i}}\} - \sum_{k=m+1}^{n} [\alpha_{ik}] x_k . \qquad (4.3)$$

Пусть переменные x_k, $k \geq m+1$ – целые числа.

Тогда для выполнения условия целочисленности x_k необходимо выполнение следующего условия:

$$\{b_i\} - \sum_{k=m+1}^{n} [\alpha_{ik}] x_k \leq 0. \qquad (4.4)$$

Условие (4.4) и будет искомым правильным отсечением, которое отсекает найденный целочисленный план.

Далее для нахождения целочисленного решения исходной задачи к ограничениям последней симплекс-таблицы, содержащей оптимальный план, добавляют условие (4.4) и полученную расширенную задачу решают симплексным методом.

В этих методах «движение» к оптимальному целочисленному решается по целочисленным планам и первый же достигнутый целочисленный план является оптимальным.

Методы второй группы используют прямые алгоритмы решения линейных целочисленных задач. Эти алгоритмы разработал Гомори, и советский математик Юнг, и американский математик Т. Ху. В этих алгоритмах в процессе решения осуществляется движение от одного целочисленного плана к другому, лучшему, пока не достигнется оптимальный план.

5. Задача нелинейного программирования

Нелинейное программирование – это математические методы отыскания максимума функции при наличии ограничений в виде уравнений или неравенств, функция одного из которых по крайней мере не линейна.

В общем виде постановка задачи нелинейного программирования сводится к следующему:

Целевая функция задается в виде:

$$Y=f(x_1, x_2,\dots x_n)\rightarrow\max(\min). \qquad (5.1)$$

Условия (ограничения) определяются функциями:

$$D:\begin{cases} .g_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\geq 0, \\ g_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\geq 0, \\ g_m(x_1,x_2,\dots,x_n)\geq 0, \end{cases} \qquad (5.2)$$

где n – количество параметров;

m – количество ограничений.

При $x_i \geq 0$, $i=\overline{1,n}$ - параметры, $j=\overline{1,m}$ - ограничения.

Причем, по крайней мере одна из функций y, g_1, g_2, g_m – нелинейная.

Решается такая задача довольно сложно. Например, если в результате удвоения затрат (при определенных ограничениях задачи) прибыль как целевая функция возрастает в два раза, а при утроении, допустим, в 2,5 раза, то мы имеем дело с нелинейной зависимостью.

На практике мы постоянно встречаемся с ней: из-за деления издержек производства на предприятиях на переменные и условно-постоянные, из-за насыщения спроса на товары, когда следующую каждую единицу продать труднее, чем предыдущую и т.д.

Задачи нелинейного программирования очень сложны. Часто на практике их упрощают тем, что приводят к линейным, для чего используют в основном два метода:

1. Нелинейную целевую функцию на тех или иных участках условно принимают линейной, т.е. используют метод кусочно-линейного приближения. Однако этот метод применим только к некоторым видам нелинейных задач.

2. Нелинейная задача (чаще всего задача выпуклого программирования) решается с помощью одного из классических методов – метода множителей Лагранжа. С их помощью находят седловую точку функции, когда значение функции 2-х аргументов представляет собой одновременно максимум относительно одной переменной и минимум относительно других. Функция Лагранжа достигает максимума по исходным переменным (прямой задачи) и минимума по множителям Лагранжа.

Универсального же метода для решения задачи нелинейного программирования нет. Чаще всего для решения этих задач используют графические методы, к которым прежде всего относятся методы наискорейшего спуска (в задачи минимизации) или наискорейшего подъема (максимум). В этих методах:

1) выбирается некоторая начальная точка, являющаяся допустимым решением задачи. В этой точки вычисляется градиент функции цели (т.е. вектор, направленный в сторону наискорейшего возрастания или убывания функции и равный по величине ее производной в этом направлении).

2) из начальной точки производится движение в направлении градиента до тех пор, пока функция цели возрастает или убывает.

3) по достижении точки, в которой функция цели получает наибольшее приращение, движение прекращается.

4) этот процесс продолжается до тех пор, пока не достигается граница области допустимых решений, а движение вдоль градиента становится невозможным.

5)в достигнутой границей точке определяется возможное направление, при движении вдоль которого функция цели возрастает.

6) такой процесс движения от точки к точке с возрастанием функции цели продолжается до тех пор, пока не достигается точка, в которой не существует ни одного возможного направления. Эта точка и является самым оптимальным решением задачи.

Также существуют и некоторые другие методы решения задач нелинейного программирования: метод дробления шага, метод допустимых направлений (метод возможных направлений – метод Зойтендейка) и др.

Методами нелинейного программирования решаются задачи распределения неоднородных ресурсов, инвестиций.

6. Задача динамического программирования

Динамическое программирование служит для выбора наилучшего плана выполнения многоэтапных действий.

Основу решения задач динамического программирования составляет многошаговый процесс принятия решений. Он разработан в 50-е годы XX века американскими математиками Ричардом Беллманом и Стюартом Дрейфусом.

Процесс управления многошагового процесса построен на использовании принципа оптимальности Р. Беллмана, который выражает оптимальное поведение: «оптимальное поведение обладает тем свойством, что, каковы бы ни были первоначальное состояние и решение в начальный момент, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, получающегося в результате первого решения».

Этот принцип можно выразить и рассуждая от противного: если не использовать наилучшим образом то, чем мы располагаем сейчас, то в дальнейшем не удастся наилучшим образом распорядится тем, что мы имели (могли бы иметь).

Или в общем виде принцип оптимальности Беллмана заключен в замене решения исходной многомерной задачи последовательностью задач меньшой размерности.

Поэтому, постановка задачи динамического программирования сводится к следующему.

1. Имеется некоторая управляемая операция (целенаправленное действие), распадающаяся (естественно или искусственно) на m шагов – этапов.

2. На каждом шаге m_i осуществляется распределение и перераспределение компонентов (ресурсов), участвующих в операции с целью улучшения ее результата в целом. Эти распределения в динамическом программировании называются управлениями операцией и обозначаются буквой U. Эффективность операции в целом оценивается тем же показателем, что и эффективность ее управления $W(U)$, которая, в свою очередь, зависит от всей совокупности управлений на каждом шаге операции:

$$W = W(U) = W(U_1, U_2,\ldots,U_m). \qquad (6.1)$$

Управление, при котором показатель W (эффективность) достигает максимума, называется оптимальным управлением, которое обозначается буквой U.

3. Оптимальное управление многошаговым процессом состоит из совокупности оптимальных шаговых управлений:

$$U=U_1, U_2,\ldots,U_m. \qquad (6.2)$$

Таким образом, задача динамического программирования - определить оптимальное управление на каждом шаге U_i и тем самым, оптимальное управление всей операции в целом.

В большинстве практических задач принимается, что показатель эффективности операции W в целом представляет собой сумму эффективности действий на всех этапах (шагах) операции:

$$W=\Sigma w_i, \qquad (6.3)$$

где w_i- эффективность операции на i-м шаге.

При этом в случае оптимального управления

$$W=\max\Sigma w_i. \qquad (6.4)$$

Существо решения задач динамического программирования заключается в следующем: оптимизация проводится методом последовательных приближений (итераций) в 2 круга.

На первом круге, идя от последующих шагов к предыдущим, находится так называемое условное оптимальное управление, которое выбирается таким, чтобы все предыдущие шаги обеспечивали максимальную эффективность последующего шага. Иными словами на каждом шаге имеется такое управление, которое обеспечивает оптимальное продолжение операции. Этот принцип выбора управления называется принципом оптимальности.

Так продолжается до первого шага, но поскольку первый шаг не имеет предыдущего, то полученное для него условие оптимальное управление теряет свой условный характер и становится оптимальным управлением, которое мы ищем.

Второй круг оптимизации начинается с первого шага, для которого оптимальное управление известно. Имея для всех шагов после первого шага условные оптимальные управления, мы знаем, что необходимо делать на каждом последующем шаге. Это дает нам возможность последовательно переходить от условных к оптимальным управлениям для всех последующих шагов, что обеспечивает оптимальность операции в целом.

Несмотря на выигрыш в сокращении вычислений при использовании метода динамического программирования, по сравнению с простым перебором возможных вариантов, их объем остается очень большим. Поэтому размерность практических задач динамического программирования всегда не значительна, что ограничивает его применение.

Можно выделить два наиболее общих класса, к которым можно применить этот метод:

1-й класс. Задачи планирования деятельности экономического объекта (предприятия, отрасли) с учетом изменения потребности в производимой продукции во времени.

2-й класс. Задачи оптимального распределения ресурсов между различными направлениями во времени.

Методы теории динамического программирования пригодны не только для дискретных, но и для непрерывных процессов управления. Они существенно упрощают решение многих задач. Тем не менее, они требуют громоздких вычислений, что значительно снижает эффективность их использования.

6.1 Метод Беллмана

Пример 6.1.1

Имеется 5 пунктов линейно-угловой геодезической сети x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Для определения координат пунктов требуется произвести измерения на каждом из них. Определить минимальный маршрут следования из пункта x_1 с возвратом в него же, обеспечивающий минимальные издержки, если известны расстояния между всеми пунктами сети (табл. 6.1.1).

Таблица 6.1.1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	40	50	60	55
x_2	40	0	70	30	25
x_3	50	70	0	80	45
x_4	60	30	80	0	10
x_5	55	25	45	10	0

1. Сформируем попарно трехчленные группировки расстояний, в которых последний пункт будет идентичным.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 40 + 70 + 80 = 190, \\ x_1 - x_3 - x_2 - x_4 = 50 + 70 + 30 = 150. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_5 - x_4 = 40 + 25 + 10 = 75, \\ x_1 - x_5 - x_2 - x_4 = 55 + 25 + 35 = 110. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_5 = 40 + 70 + 45 = 155, \\ x_1 - x_3 - x_2 - x_5 = 50 + 70 + 25 = 145. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 - x_5 = 40 + 30 + 10 = 80, \\ x_1 - x_4 - x_2 - x_5 = 60 + 30 + 25 = 115. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 - x_5 = 50 + 80 + 10 = 140, \\ x_1 - x_4 - x_3 - x_5 = 60 + 80 + 45 = 185. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 - x_3 = 40 + 30 + 80 = 150, \\ x_1 - x_4 - x_2 - x_3 = 60 + 30 + 70 = 160. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_5 - x_3 = 40 + 25 + 45 = 110, \\ x_1 - x_5 - x_2 - x_3 = 55 + 25 + 70 = 150. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - x_5 - x_3 = 60 + 10 + 45 = 115, \\ x_1 - x_5 - x_4 - x_3 = 55 + 10 + 80 = 145. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 - x_2 = 50 + 80 + 30 = 160, \\ x_1 - x_4 - x_3 - x_2 = 60 + 80 + 70 = 210. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_5 - x_2 = 50 + 45 + 25 = 120, \\ x_1 - x_5 - x_3 - x_2 = 55 + 45 + 70 = 170. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - x_5 - x_2 = 60 + 10 + 25 = 95, \\ x_1 - x_5 - x_4 - x_2 = 55 + 10 + 30 = 95. \end{cases}$$

2. Найдем минимальные расстояния в полученных группировках и прибавим к ним расстояние до последнего пункта.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_2 - x_4 - x_5 = 150 + 10 = \mathit{160}, \\ x_1 - x_2 - x_4 - x_3 - x_5 = 150 + 45 = 195, \\ x_1 - x_3 - x_4 - x_2 - x_5 = 160 + 25 = 185. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_5 - x_4 - x_3 = 75 + 80 = 155, \\ x_1 - x_2 - x_4 - x_5 - x_3 = 80 + 45 = \mathit{125}, \\ x_1 - x_5 - x_4 - x_2 - x_3 = 95 + 70 = 165, \\ x_1 - x_4 - x_5 - x_2 - x_3 = 95 + 75 = 165. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_5 - x_4 - x_2 = 105 + 30 = \mathit{135}, \\ x_1 - x_3 - x_4 - x_5 - x_2 = 140 + 25 = 165, \\ x_1 - x_4 - x_5 - x_3 - x_2 = 115 + 75 = 185. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_2 - x_5 - x_4 = 145 + 10 = 155, \\ x_1 - x_2 - x_5 - x_3 - x_4 = 110 + 80 = 190, \\ x_1 - x_3 - x_5 - x_2 - x_4 = 120 + 30 = \mathit{150}. \end{cases}$$

3. К найденному минимальному расстоянию прибавим расстояние до первого пункта:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_2 - x_4 - x_5 - x_1 = 160 + 55 = 215, \\ x_1 - x_2 - x_4 - x_5 - x_3 - x_1 = 125 + 50 = \mathit{175}, \\ x_1 - x_3 - x_5 - x_4 - x_2 - x_1 = 135 + 40 = \mathit{175}, \\ x_1 - x_3 - x_5 - x_2 - x_4 - x_1 = 150 + 60 = 210. \end{cases}$$

Таким образом, установлено, что имеется два маршрута, обеспечивающих минимальные издержки, а именно: $x_1 - x_2 - x_4 - x_5 - x_3 - x_1 = 125 + 50 = \mathit{175}$ км, $x_1 - x_3 - x_5 - x_4 - x_2 - x_1 = 135 + 40 = \mathit{175}$ км.

Содержание

Список литературы

1. Лопатников, Л.И. Экономико-математический словарь / Л.И. Лопатников/ Москва«ABF», 1996 г.

2. Хутснутдинова, Р.Ш. Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие /Р.Ш. Хутснутдинова/ М.:ИНФРА – М, 2013. – 224 с.

3. Гармаш, А.Н. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебник для бакалавров/ В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, И.В. Орлова/ М.: Издательство Юрайт, 2013. – 328 с.

4. Чхартишвили, А.Г. Математические методы и модели в управлении: учебное пособие / Е.В. Шикин, А.Г. Чхартишвили / М.: КДУ, 2009. – 440 с.

5. Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем / Бережная Е.В., Бережной В.И./ М.: "Финансы и статистика", 2001.

6. Хибухин, В.П. Экономико-математическое моделирование в управлении строительством и путевом хозяйстве. Учебное пособие/ Хибухин В.П., Меркушева В.С. / Санкт-Петербург, ПГУПС 2002.

7. Конюховский, П. Математические методы исследования операций в экономике. СПб «Питер», 2000г.

8. Орлова, И.В. Экономико-математическое моделирование: Практическое пособие по решению задач. – М.: Вузовский учебник: ИНФРА – М, 2013. – 140 с.

9. Втюрин, В.И. Математические методы планирования и управления строительством / Хибухин В.П., Величкин В.З., Втюрин В.И./ Л.: Стройиздат, 1990.

10. Замков, О.О. Математические методы в экономике / Замков О.О., Черемных Ю.А., Толстопятенко А.В./ М.: "Дело и сервис", 1999.

Учебное издание

Меркушева Виктория Сергеевна
Богомолова Наталья Николаевна

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Учебное пособие

Редактор и корректор
Компьютерная верстка

План 2015 г., № ***

Подписано в печать с оригинал-макета **.**.2013
Формат ******. Бумага для множ. апп. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2.500. Уч.-изд. л. ****. Тираж 100 экз.
Заказ ****.
Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I.
190031, СПб., Московский пр., 9.
Типография ПГУПС. 190031, СПб., Московский пр., 9.